

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_7(0)$ de e^x .

Déterminer le nombre de parties de E (en explicitant le décompte des parties de E à k éléments).

Exercice 1 : Déterminer le $DL_3(0)$ de $\frac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

Correction : $\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 2 : Montrer que $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$.

Correction : $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{n}{p} = 2^p \binom{n}{p}$.

Exercice 3 : Soit \mathcal{C} l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

\mathcal{V} est l'ensemble des fonctions qui peuvent s'écrire comme différence de deux éléments de \mathcal{C} .

Montrer que \mathcal{V} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Correction :

■ $0 = 0 - 0 \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{V} \neq \emptyset$;

■ Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$, avec $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}$.

On a $f + g = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$.

Or $f_1 + g_1, f_2 + g_2 \in \mathcal{C}$ (la somme de deux fonctions croissantes est croissante), donc $f + g \in \mathcal{V}$.

■ Soient $f \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$.

Si $\lambda \geq 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = \lambda f_1 - \lambda f_2 \in \mathcal{V}$ car $\lambda f_1, \lambda f_2 \in \mathcal{C}$.

Si $\lambda < 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = -\lambda f_2 - (-\lambda f_1) \in \mathcal{V}$ car $-\lambda f_2, -\lambda f_1 \in \mathcal{C}$.

On en déduit que \mathcal{V} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_7(0)$ de $\frac{1}{1-x}$.

Vect (u_1, \dots, u_n) est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.

Exercice 1 : Déterminer le $DL_3(0)$ de $\ln \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction : $\ln \frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un ensemble fini E à n éléments.

Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?

Correction : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$.

Exercice 3 : Soit $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

G est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $0 \in E$ donc $G \neq \emptyset$;
- Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } (\lambda u + \mu v)_{n+2} = \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1} + 2u_n) + \mu(3v_{n+1} + 2v_n) = 3(\lambda u + \mu v)_{n+1} + 2(\lambda u + \mu v)_n.$$

Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in G$.

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_4(0)$ de $(1+x)^\alpha$.

$F+G$ est un sous espace vectoriel de E .

Exercice 1 : Déterminer le $DL_7(0)$ de $\sqrt{\cos(x)}$.

Correction : $\sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + o(x^7)$.

Exercice 2 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Exercice 3 : Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1)\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

■ $0 \in E$ donc $E \neq \emptyset$;

■ Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ et de même $(\lambda P + \mu Q)(1) = 0$.

Par conséquent, $\lambda P + \mu Q \in E$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_4(0)$ de $\tan(x)$.

Caractérisation de la somme directe.

Exercice 1 : Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1 + \sin(x)}$.

Correction : $\sqrt{1 + \sin(x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 2 : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes.

Il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?

Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction : Une tenue est un triplet (P, T, C) : il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes.

- « Il est tout en noir » : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.

La probabilité de l'événement « Il est tout en noir » est donc : $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$.

- « Une seule pièce est noire sur les trois » : notons les événements :

N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par :

$$(N_1 \cap \bar{N}_2 \cap \bar{N}_3) \cup (\bar{N}_1 \cap N_2 \cap \bar{N}_3) \cup (\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 \cap N_3).$$

Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement « une seule pièce est noire sur les trois » est donc : 0.325.

Exercice 3 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}.$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}.$$

Correction :

1 \odot $(0, 0, 0) \in E_1$.

\odot Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de E_1 . On a donc $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$.
Donc $3(x + x') - 7(y + y') = (z + z')$, d'où $(x + x', y + y', z + z')$ appartient à E_1 .

\odot Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_1$. Alors la relation $3x - 7y = z$ implique que $3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z$
donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_1 .

2 $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$.
Donc $(1, 0, -1)$ et $(1, 0, 1)$ appartiennent à E_2 mais $(1, 0, -1) + (1, 0, 1) = (2, 0, 0)$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_7(0)$ de $\text{ch}(x)$.

Déterminer le nombre de parties de E (en explicitant le décompte des parties de E à k éléments).

Exercice 1 : Déterminer le $DL_5(0)$ de $(1+x)^x$.

Correction : $(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Correction : $f : \mathbb{N}_{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_n$ est surjective \Leftrightarrow il existe un, et un seul élément de \mathbb{N}_n ayant deux antécédents, les autres en ayant exactement un.

$$\binom{n+1}{2} \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

Exercice 3 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}.$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

Correction :

1 E_3 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En effet :

ⓐ $(0, 0, 0) \in E_3$.

ⓑ Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de E_3 . On a donc $x + y - z = x + y + z = 0$ et $x' + y' - z' = x' + y' + z' = 0$. Donc $(x + x') + (y + y') - (z + z') = (x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$ et $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ appartient à E_3 .

ⓒ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_3$. Alors la relation $x + y - z = x + y + z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_3 .

2 Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le DL₇(0) de $\frac{1}{1+x}$.

Vect (u_1, \dots, u_n) est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.

Exercice 1 : Déterminer le DL₆(0) de : $e^{x \sin(x)}$.

Correction : $e^{x \sin x} = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + o(x^6)$.

Exercice 2 :

- 1 Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant (en écriture décimale) avec p chiffres ?
- 2 Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant avec p chiffres ne comportant pas de 0 dans leur écriture ?
- 3 Quel est le pourcentage de nombres s'écrivant avec 46 chiffres ou moins, et qui comportent le chiffre 0 dans leur écriture.

Correction :

1 $9 \times 10^{p-1}$.

2 9^p .

3 Le complémentaire est $9 + 9^2 + \dots + 9^{46} = 9 \times \frac{9^{46} - 1}{9 - 1}$.

Le pourcentage est donc $1 - 9 \times \frac{9^{46} - 1}{8 \times 10^{46}} \approx 99,1\%$.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 . Vect $\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect $\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Correction : Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Ils engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_7(0)$ de $\sin(x)$.

Déterminer le nombre de parties de E (en explicitant le décompte des parties de E à k éléments).

Exercice 1 : Déterminer le $DL_7(0)$ de : $\ln \frac{\arctan(x)}{x}$.

Correction : $\ln \frac{\arctan(x)}{x} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{13}{90}x^4 - \frac{251}{2835}x^6 + o(x^7)$.

Exercice 2 :

- 1 On dispose de 5 couleurs pour colorier un drapeau constitué de 6 bandes, deux zones voisines ne pouvant recevoir la même couleur. Dénombrer les coloriages possibles.
- 2 On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
- 3 Combien y a-t-il de mots de 5 lettres qui finissent par une voyelle ? par deux voyelles distinctes ?

Correction :

- 1 $5 \times 4^5 = 5\ 120$
- 2 On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles 3^{50}
- 3 une voyelle : $26^4 \times 6$; deux voyelles distinctes $26^3 \times 6 \times 5$.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X - a) \mid P\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$.

La somme est-elle directe ?

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_7(0)$ de $\ln(1+x)$.

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.

Exercice 1 : Déterminer le $DL_5(0)$ de : $\ln \frac{\sin(x)}{x}$.

Correction : $\ln \frac{\sin(x)}{x} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^5)$.

Exercice 2 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 . $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Correction : Non. Tout d'abord par définition $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Nous allons trouver un vecteur de \mathbb{R}^4 qui n'est pas dans $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0, 0, 0, 1)$.

$u \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α, β, γ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α, β, γ tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à trouver α, β, γ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrer tout \mathbb{R}^4 car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace \mathbb{R}^4 de dimension 4.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_6(0)$ de $\arctan(x)$.

$F + G$ est un sous espace vectoriel de E .

Exercice 1 : Déterminer le $DL_7(0)$ de : $\tan^2(x)$.

Correction : $\tan^2(x) = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^7)$.

Exercice 2 : Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres (écrits en base 10) où comportant un chiffre répété et un seul ?

Correction :

- Le chiffre répété est le premier :

9 choix de chiffres; 4 choix pour la position de la répétition; $9 \times 8 \times 7$ pour les autres.

- Le chiffre répété n'est pas le premier :

9 choix pour le chiffre en première place;

$\binom{4}{2}$ choix de positions pour la répétition, et 9 choix de chiffres (différents du premier);

8×7 pour les autres.

$$\text{Au total : } 9 \times 4 \times 9 \times 8 \times 7 + 9 \times \left[\binom{4}{2} \times 9 \right] \times 8 \times 7 = 18144 + 27216 = 45360.$$

Exercice 3 : Soit $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

G est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $0 \in E$ donc $G \neq \emptyset$;
- Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } (\lambda u + \mu v)_{n+2} = \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1} + 2u_n) + \mu(3v_{n+1} + 2v_n) = 3(\lambda u + \mu v)_{n+1} + 2(\lambda u + \mu v)_n.$$

Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in G$.

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_6(0)$ de $\text{sh}(x)$.

Caractérisation de la somme directe.

Exercice 1 : Déterminer le $DL_4(0)$ de : $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Correction : $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 2 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Correction : $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Exercice 3 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}.$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}.$$

Correction :

1 E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.

2 E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_7(0)$ de $\ln(1-x)$.

Déterminer le nombre de parties de E (en explicitant le décompte des parties de E à k éléments).

Exercice 1 : Déterminer le $DL_5(0)$ de $\frac{x}{\sin x}$.

Correction : $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5)$.

Exercice 2 : Combien de mains de cinq cartes extraites d'un jeu de 32 cartes contiennent exactement 2 As et 2 Cœurs ?

Correction :

1 Sans l'as de cœur : $\binom{3}{2} \binom{7}{2} \binom{21}{1} = 1\,323$.

2 Avec l'as de cœur : $\binom{3}{1} \binom{7}{1} \binom{21}{2} = 4\,410$.

Au total, 5 733 mains.

Exercice 3 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}.$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0\}.$$

Correction :

1 E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3 .

2 E_4 : non, en fait E_4 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$ car $(2, 0) \in E_4$ mais $-(2, 0) = (-2, 0) \notin E_4$.

Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner le $DL_4(0)$ de $\tan(x)$.

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.

Exercice 1 : Déterminer le $DL_5(0)$ de : $\frac{1}{\cos x}$.

Correction : $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$.

Exercice 2 : De combien de façons peut-on répartir n personnes autour d'une table ronde ?

Correction : $(n-1)!$: la première personne s'assoit où elle veut...

Exercice 3 : Soit $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists k \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

■ $0 \in E$ donc $E \neq \emptyset$;

■ Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

Par définition, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k_1|x|$ et $|g(x)| \leq k_2|x|$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq k_1|x| + k_2|x| = (k_1 + k_2)|x|$.

On peut donc poser $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| \leq k|x|$, i.e. $(f+g) \in E$.

■ Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par définition, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|k|x|$.

On peut donc poser $k' = |\lambda|k \in \mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| \leq k'|x|$, i.e. $\lambda f \in E$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.