# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_7(0)$ *de* $\mathrm{e}^x$.
*Déterminer le nombre de parties de* E *(en explicitant le décompte des parties de* E *à* $k$ *éléments).*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1}$.

**Correction** : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)$.

**Exercice 2** : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$.

**Correction** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{p} = 2^p\binom{n}{p}$.

**Exercice 3** : Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$\mathcal{V}$ est l'ensemble des fonctions qui peuvent s'écrire comme différence de deux éléments de $\mathcal{C}$.
Montrer que $\mathcal{V}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

**Correction** :

- $0 = 0 - 0 \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{V} \neq \emptyset$ ;
- Soient $f, g \in \mathcal{V}$.
  Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$, avec $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}$.
  On a $f + g = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$.
  Or $f_1 + g_1, f_2 + g_2 \in \mathcal{C}$ (la somme de deux fonctions croissantes est croissante) donc $f + g \in \mathcal{V}$.
- Soient $f \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$.
  Si $\lambda \geqslant 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = \lambda f_1 - \lambda f_2 \in \mathcal{V}$ car $\lambda f_1, \lambda f_2 \in \mathcal{C}$.
  Si $\lambda < 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = -\lambda f_2 - (-\lambda f_1) \in \mathcal{V}$ car $-\lambda f_2, -\lambda f_1 \in \mathcal{C}$.

On en déduit que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_7(0)$ *de* $\dfrac{1}{1-x}$.

$\mathrm{Vect}\,(u_1,\dots,u_n)$ *est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

**Correction** : $\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{24}x^2 - \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.

**Exercice 2** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un ensemble fini E à $n$ éléments.

Combien y a-t-il de couples $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ tels que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ ?

**Correction** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} = 3^n$.

**Exercice 3** : Soit $\mathrm{G} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

G est-il un espace vectoriel ?

**Correction** :

- $0 \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{G} \neq \emptyset$ ;
- Soient $u, v \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  On a $(\lambda u+\mu v)_{n+2} = \lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1}+2u_n)+\mu(3v_{n+1}+2v_n) = 3(\lambda u+\mu v)_{n+1}+2(\lambda u+\mu v)_n$.

  Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in \mathrm{G}$.

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_4(0)$ *de* $(1+x)^\alpha$.

$\mathrm{F}+\mathrm{G}$ *est un sous espace vectoriel de* E.

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\sqrt{\cos(x)}$.

**Correction** : $\sqrt{\cos(x)} = 1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 - \dfrac{19}{5760}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

**Exercice 2** : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

**Correction** : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

**Exercice 3** : Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] | \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

**Correction** :

- $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{E} \neq \emptyset$ ;
- Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  On a $(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(0) = \lambda\mathrm{P}(0) + \mu\mathrm{Q}(0) = 0$ et de même $(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(1) = 0$.

  Par conséquent, $\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_4(0)$ *de* $\tan(x)$.

*Caractérisation de la somme directe.*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\sqrt{1+\sin(x)}$.

**Correction** : $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

**Exercice 2** : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes.

Il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?

Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

**Correction** : Une tenue est un triplet $(\mathrm{P}, \mathrm{T}, \mathrm{C})$ : il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes.

- ‹‹Il est tout en noir›› : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.

  La probabilité de l'événement ‹‹Il est tout en noir›› est donc : $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$.
- ‹‹Une seule pièce est noire sur les trois ›› : notons les événements :

  $\mathrm{N}_1$ la première pièce (pantalon) est noire, $\mathrm{N}_2$ la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, $\mathrm{N}_3$ la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par :

  $(\mathrm{N}_1 \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \mathrm{N}_2 \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \mathrm{N}_3)$.

  Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement ‹‹une seule pièce est noire sur les trois›› est donc : $0.325$.

**Exercice 3** : Déterminer lesquels des ensembles $\mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{E}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}.$$

$$\mathrm{E}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}.$$

Correction :

**1** ⓐ $(0,0,0) \in \mathrm{E}_1$.

ⓑ Soient $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$ deux éléments de $\mathrm{E}_1$. On a donc $3x-7y=z$ et $3x'-7y'=z'$. Donc $3(x+x')-7(y+y')=(z+z')$, d'où $(x+x',y+y',z+z')$ appartient à $\mathrm{E}_1$.

ⓒ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathrm{E}_1$. Alors la relation $3x-7y=z$ implique que $3(\lambda x)-7(\lambda y)=\lambda z$ donc que $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ appartient à $\mathrm{E}_1$.

**2** $\mathrm{E}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $\mathrm{E}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $(1,0,-1)$ et $(1,0,1)$ appartiennent à $\mathrm{E}_2$ mais $(1,0,-1)+(1,0,1)=(2,0,0)$ n'appartient pas à $\mathrm{E}_2$ qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_7(0)$ *de* $\mathrm{ch}\,(x)$.

*Déterminer le nombre de parties de* E *(en explicitant le décompte des parties de* E *à* $k$ *éléments).*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $(1+x)^x$.

**Correction** : $(1+x)^x = 1 + x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{6}x^4 - \dfrac{3}{4}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$.

**Exercice 2** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

**Correction** : $f : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_n$ est surjective $\iff$ il existe un, et un seul élément de $\mathbb{N}_n$ ayant deux antécédents, les autres en ayant exactement un.

$\dbinom{n+1}{2} \times n \times (n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$

**Exercice 3** : Déterminer lesquels des ensembles $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x + y - z = x + y + z = 0\}.$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

**Correction** :

1. $E_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   - a) $(0, 0, 0) \in E_3$.
   - b) Soient $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$ deux éléments de $E_3$. On a donc $x + y - z = x + y + z = 0$ et $x' + y' - z' = x' + y' + z' = 0$. Donc $(x + x') + (y + y') - (z + z') = (x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$ et $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ appartient à $E_3$.
   - c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_3$. Alors la relation $x + y - z = x + y + z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à $E_3$.
2. Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ appartiennent à $E_4$ mais leur somme $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ ne lui appartient pas donc $E_4$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_7(0)$ *de* $\dfrac{1}{1+x}$.

$\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n)$ *est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $e^{x\sin(x)}$.

**Correction** : $e^{x\sin x} = 1 + x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{1}{120}x^6 + \mathrm{o}(x^6)$.

**Exercice 2** :

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant (en écriture décimale) avec $p$ chiffres ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant avec $p$ chiffres ne comportant pas de 0 dans leur écriture ?
3. Quel est le pourcentage de nombres s'écrivant avec 46 chiffres ou moins, et qui comportent le chiffre 0 dans leur écriture.

**Correction** :

1. $9 \times 10^{p-1}$.
2. $9^p$.
3. Le complémentaire est $9 + 9^2 + \dots + 9^{46} = 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{9-1}$.

   Le pourcentage est donc $1 - 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{8 \times 10^{46}} \approx 99,1\%$.

**Exercice 3** : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ ?

**Correction** : Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_7(0)$ *de* $\sin(x)$.

*Déterminer le nombre de parties de* E *(en explicitant le décompte des parties de* E *à* $k$ *éléments).*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

**Correction** : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{13}{90}x^4 - \dfrac{251}{2835}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

**Exercice 2** :

1. On dispose de 5 couleurs pour colorier un drapeau constitué de 6 bandes, deux zones voisines ne pouvant recevoir la même couleur. Dénombrer les coloriages possibles.
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
3. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres qui finissent par une voyelle ? par deux voyelles distinctes ?

**Correction** :

1. $5 \times 4^5 = 5\ 120$
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles $3^{50}$
3. une voyelle : $26^4 \times 6$ ; deux voyelles distinctes $26^3 \times 6 \times 5$.

**Exercice 3** : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit

$$\mathrm{E}_a = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}; (\mathrm{X} - a)/\mathrm{P}\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $a \neq b$ alors $\mathrm{E} = \mathrm{E}_a + \mathrm{E}_b$.

La somme est-elle directe ?

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_7(0)$ *de* $\ln(1+x)$.

Vect $(u_1, \ldots, u_n)$ *est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\ln \dfrac{\sin(x)}{x}$.

**Correction** : $\ln \dfrac{\sin(x)}{x} = -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 + o(x^5)$.

**Exercice 2** : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

**Correction** : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

**Exercice 3** : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ ?

**Correction** : Non. Tout d'abord par définition $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Nous allons trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0,0,0,1)$.

$u \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ si et seulement si il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma$ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc $\alpha, \beta, \gamma$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à trouver $\alpha, \beta, \gamma$ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_6(0)$ *de* $\arctan(x)$.

$\mathrm{F}+\mathrm{G}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathrm{E}$.

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\tan^2(x)$.

**Correction** : $\tan^2(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{17}{45}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

**Exercice 2** : Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres (écrits en base 10) où comportant un chiffre répété et un seul ?

**Correction** :

- Le chiffre répété est le premier :

  9 choix de chiffres ; 4 choix pour la position de la répétition ; $9\times 8\times 7$ pour les autres.
- Le chiffre répété n'est pas le premier :

  9 choix pour le chiffre en première place ;

  $\dbinom{4}{2}$ choix de positions pour la répétition, et 9 choix de chiffres (différents du premier) ;

  $8\times 7$ pour les autres.

Au total : $9\times 4\times 9\times 8\times 7 + 9\times\left[\dbinom{4}{2}\times 9\right]\times 8\times 7 = 18144 + 27216 = 45360.$

**Exercice 3** : Soit $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

G est-il un espace vectoriel ?

**Correction** :

- $0 \in E$ donc $G \neq \emptyset$ ;
- Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  On a $(\lambda u+\mu v)_{n+2} = \lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1}+2u_n)+\mu(3v_{n+1}+2v_n) = 3(\lambda u+\mu v)_{n+1}+2(\lambda u+\mu v)_n$.

  Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in G$.

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_6(0)$ *de* $\mathrm{sh}(x)$.

*Caractérisation de la somme directe.*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

**Correction** : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

**Exercice 2** : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

**Correction** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

**Exercice 3** : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\mathrm{E}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+a=0 \text{ et } x+3az=0\right\}.$$

$$\mathrm{E}_2 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1)=0\right\}.$$

**Correction** :

1. $\mathrm{E}_1$ : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin \mathrm{E}_1$ ; oui, si $a=0$ car alors $\mathrm{E}_1$ est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$.
2. $\mathrm{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_7(0)$ *de* $ln(1-x)$.

*Déterminer le nombre de parties de* E *(en explicitant le décompte des parties de* E *à* $k$ *éléments).*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{x}{\sin x}$.

**Correction** : $\dfrac{x}{\sin x} = 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{7}{360}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

**Exercice 2** : Combien de mains de cinq cartes extraites d'un jeu de 32 cartes contiennent exactement 2 As et 2 Cœurs ?

**Correction** :

1. Sans l'as de cœur : $\dbinom{3}{2}\dbinom{7}{2}\dbinom{21}{1} = 1\,323$.
2. Avec l'as de cœur : $\dbinom{3}{1}\dbinom{7}{1}\dbinom{21}{2} = 4\,410$.

Au total, 5 733 mains.

**Exercice 3** : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\mathrm{E}_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}.$$

$$\mathrm{E}_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}.$$

**Correction** :

1. $\mathrm{E}_3$ : non, car la fonction nulle n'appartient pas à $\mathrm{E}_3$.
2. $\mathrm{E}_4$ : non, en fait $\mathrm{E}_4$ n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0) \in \mathrm{E}_4$ mais $-(2,0) = (-2,0) \notin \mathrm{E}_4$.

# Analyse asymptotique, dénombrements et espaces vectoriels

**Question de cours** : *Donner le* $\mathrm{DL}_4(0)$ *de* $\tan(x)$.

Vect $(u_1, \dots, u_n)$ *est un sous-espace vectoriel : c'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion.*

**Exercice 1** : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{1}{\cos x}$.

**Correction** : $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

**Exercice 2** : De combien de façons peut-on répartir $n$ personnes autour d'une table ronde ?

**Correction** : $(n-1)!$ : la première personne s'assoit où elle veut...

**Exercice 3** : Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists k \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k|x|\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

**Correction** :

- $0 \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{E} \neq \emptyset$ ;
- Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

  Par définition, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k_1|x|$ et $|g(x)| \leqslant k_2|x|$.

  On a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant k_1|x| + k_2|x| = (k_1 + k_2)|x|$.

  On peut donc poser $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{R}_+$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| \leqslant k|x|$, i.e. $(f+g) \in \mathrm{E}$.
- Soient $f \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Par définition, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k|x|$ .

  Si $\lambda \in \mathrm{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda| k |x|$.

  On peut donc poser $k' = |\lambda| k \in \mathbb{R}_+$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| \leqslant k'|x|$, i.e. $\lambda f \in \mathrm{E}$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.