Espaces vectoriels

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 23

Sommaire I

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes comme on a commencé à l'entrevoir dans les chapitres précédents.

Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices, ...

$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}[X]$	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$	$f-2g$	$3P+2Q$	$3A+2B$	$3(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+2(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\vec{0}$	$x\longmapsto 0_{\mathbb{R}}$	$0_{\mathbb{R}[X]}$	$(0)_{n,p}$	$(0)_{n\in\mathbb{N}}$

Figure 1 – Exemples d'espaces vectoriels

Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,...

Au paragraphe (III) , on s'intéressera à une notion complètement fondamentale, celle d'application linéaire, qui va éclairer d'un jour nouveau tous les termes vus depuis le début de l'année et faisant intervenir ce fameux mot « linéaire ».

Globalement, les applications linéaires sont des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de mathématiques très divers.

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathbb{R}[X]$	$P \longmapsto P'$	$(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y) \longmapsto ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a\,;b]\,, \mathbb{R})$	$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{ \begin{array}{c} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \longmapsto [\vec{a}\,;\vec{x}]$	$[\vec{a}\,;\lambda \vec{x} + \vec{y}] = \lambda\,[\vec{a}\,;\vec{x}] + [\vec{a}\,;\vec{y}]$
$\mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f' + af,\ a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda\,(f' + af) + (g' + ag)$
$\mathcal{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'' + af' + bf,\ a, b \in \mathbb{R}$	$(\lambda f + g)'' + a(\lambda f + g) + b(\lambda f + g) = \lambda\,(f'' + af' + bf) + (g'' + ag' + bg)$

Figure 2 – Applications linéaires et espaces vectoriels

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

- Une loi de composition interne notée + (l'addition) :

$$\begin{array}{rccc} +_{\mathrm{E}} : & \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & x +_{\mathrm{E}} y \end{array}$$

Définition 1 :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

- Une loi de composition interne notée + (l'addition) :

$$\begin{array}{rccc} +_{\mathrm{E}} : & \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & x+_{\mathrm{E}}y \end{array}$$

- Une loi de composition externe, notée $\cdot_{\mathrm{E}}$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\begin{array}{rccc} \cdot_{\mathrm{E}} : & \mathbb{K}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda._{\mathrm{E}}x \end{array}$$

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$,
      $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$,
      $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
   2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
    1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$, $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
    2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.
    3. $+_{\mathrm{E}}$ admet un élément neutre noté 0_{E} et appelé vecteur nul :

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
    1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$,
    $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
    2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.
    3. $+_{\mathrm{E}}$ admet un élément neutre noté 0_{E} et appelé vecteur nul :
    $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$
    4. Tout élément de E admet un symétrique pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé opposé de x et noté $-x$:
    $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} (-x) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$,
      $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
   2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.
   3. $+_{\mathrm{E}}$ admet un élément neutre noté 0_{E} et appelé vecteur nul :
      $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$
   4. Tout élément de E admet un symétrique pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé opposé de x et noté $-x$:
      $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} (-x) = 0_{\mathrm{E}}.$$
2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
    1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$, $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
    2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.
    3. $+_{\mathrm{E}}$ admet un élément neutre noté 0_{E} et appelé vecteur nul :
    $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$
    4. Tout élément de E admet un symétrique pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé opposé de x et noté $-x$:
    $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} (-x) = 0_{\mathrm{E}}.$$
2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :
    1. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda._{\mathrm{E}}(\mu._{\mathrm{E}}x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu)._{\mathrm{E}}x$: compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$, $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
   2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.
   3. $+_{\mathrm{E}}$ admet un élément neutre noté 0_{E} et appelé vecteur nul :
   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$
   4. Tout élément de E admet un symétrique pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé opposé de x et noté $-x$:
   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} (-x) = 0_{\mathrm{E}}.$$
2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :
   1. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda._{\mathrm{E}}(\mu._{\mathrm{E}}x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu)._{\mathrm{E}}x$: compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.
   2. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu)._{\mathrm{E}}x = \lambda._{\mathrm{E}}x +_{\mathrm{E}} \mu._{\mathrm{E}}x$: compatibilité $+_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$, $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
   2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.
   3. $+_{\mathrm{E}}$ admet un élément neutre noté 0_{E} et appelé vecteur nul :
   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$
   4. Tout élément de E admet un symétrique pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé opposé de x et noté $-x$:
   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} (-x) = 0_{\mathrm{E}}.$$
2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :
   1. $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda ._{\mathrm{E}} (\mu ._{\mathrm{E}} x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) ._{\mathrm{E}} x$: compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.
   2. $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) ._{\mathrm{E}} x = \lambda ._{\mathrm{E}} x +_{\mathrm{E}} \mu ._{\mathrm{E}} x$: compatibilité $+_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.
   3. $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda ._{\mathrm{E}} (x +_{\mathrm{E}} y) = \lambda ._{\mathrm{E}} x +_{\mathrm{E}} \lambda ._{\mathrm{E}} y$: compatibilité avec $+_{\mathrm{E}}$ dans E.

Définition 1 :

On dit que $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   1. $+_{\mathrm{E}}$ est associative : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3$, $(x +_{\mathrm{E}} y) +_{\mathrm{E}} z = x +_{\mathrm{E}} (y +_{\mathrm{E}} z) = x +_{\mathrm{E}} y +_{\mathrm{E}} z$.
   2. $+_{\mathrm{E}}$ est commutative : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $x +_{\mathrm{E}} y = y +_{\mathrm{E}} x$.
   3. $+_{\mathrm{E}}$ admet un élément neutre noté 0_{E} et appelé vecteur nul :
   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} +_{\mathrm{E}} x = x.$$
   4. Tout élément de E admet un symétrique pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé opposé de x et noté $-x$:
   $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad x +_{\mathrm{E}} (-x) = 0_{\mathrm{E}}.$$
2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :
   1. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda._{\mathrm{E}}(\mu._{\mathrm{E}}x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu)._{\mathrm{E}}x$: compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.
   2. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu)._{\mathrm{E}}x = \lambda._{\mathrm{E}}x +_{\mathrm{E}} \mu._{\mathrm{E}}x$: compatibilité $+_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.
   3. $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda._{\mathrm{E}}(x +_{\mathrm{E}} y) = \lambda._{\mathrm{E}}x +_{\mathrm{E}} \lambda._{\mathrm{E}}y$: compatibilité avec $+_{\mathrm{E}}$ dans E.
   4. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad 1_{\mathbb{K}}._{\mathrm{E}}x = x$: $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre pour $\cdot_{\mathrm{E}}$.

Définition 1 :

On appelle :

- vecteurs les éléments de E.

Définition 1 :

On appelle :

- **vecteurs** les éléments de E.
- **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1 :

On appelle :

- **vecteurs** les éléments de E.
- **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que $\mathbb{K}$ est le **corps de base** de l'espace vectoriel E.

Définition 1 :

On appelle :

- **vecteurs** les éléments de E.
- **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que $\mathbb{K}$ est le **corps de base** de l'espace vectoriel E.

Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique et on peut, en fait, les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles.

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_{\mathrm{E}}$ et $\cdot_{\mathrm{E}}$.

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_{\mathrm{E}}$ et $\cdot_{\mathrm{E}}$.
- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_{\mathrm{E}}$ et $\cdot_{\mathrm{E}}$.
- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.
- Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x + y$ signifie $(\lambda.x) + y$.

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_{\mathrm{E}}$ et $\cdot_{\mathrm{E}}$.
- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.
- Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x + y$ signifie $(\lambda.x) + y$.
- L'élément neutre de $(\mathrm{E}\,;+)$ est unique.
  En effet, supposant que l'on en ait deux e et e' alors :

$$e \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } e'}}{=} e + e' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } e}}{=} e'.$$

  C'est un fait général.

- De même, l'opposé d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ est unique. En effet, supposant qu'il en existe deux x' et $x"$ alors on aurait :

$$x' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } 0_{\mathrm{E}}}}{=} x' + 0_{\mathrm{E}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } x"}}{=} x' + (x + x") \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associativité de } +}}{=} (x' + x) + x"$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } x'}}{=} 0_{\mathrm{E}} + x" \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } 0_{\mathrm{E}}}}{=} x".$$

C'est également un fait général.

- De même, l'opposé d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ est unique. En effet, supposant qu'il en existe deux x' et $x"$ alors on aurait :

$$\begin{aligned} x' &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } 0_{\mathrm{E}}}}{=} x' + 0_{\mathrm{E}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } x"}}{=} x' + (x + x") \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associativité de } +}}{=} (x' + x) + x" \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } x'}}{=} 0_{\mathrm{E}} + x" \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } 0_{\mathrm{E}}}}{=} x". \end{aligned}$$

  C'est également un fait général.
- Si elle est non ambigüe, on allège en général l'écriture en notant λu plutôt que $\lambda \cdot \vec{u}$ pour λ un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur, même si la notation avec des flèches pour les vecteurs peut être utilisée dans un premier temps pour ne pas mélanger les objets. Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu, ...$ s'utilisent plutôt pour les scalaires que pour les vecteurs.

ATTENTION

- Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{K}}$ avec le vecteur nul 0_E : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.

ATTENTION

- Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{K}}$ avec le vecteur nul 0_E : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.
- La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall (x; x'; y) \in \mathrm{E}^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y) \in \mathrm{E}^3,\quad x+y=x'+y \implies x=x'.$
2. $\forall\;(\lambda\,;x) \in \mathbb{K}\times\mathrm{E},\ (-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x).$
   En particulier, $\quad(-1_{\mathbb{K}}).x=-x.$

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y) \in \mathrm{E}^3, \quad x+y = x'+y \implies x = x'.$
2. $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K}\times \mathrm{E},\ (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
   En particulier, $\quad (-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
3. $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad \lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y.$

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y) \in \mathrm{E}^3, \quad x+y = x'+y \implies x = x'.$
2. $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E},\ (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
   En particulier, $\quad (-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
3. $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad \lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y.$
4. $\forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\,x \in \mathrm{E}, \quad (\lambda-\mu).x = \lambda.x - \mu.x.$

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y)\in \mathrm{E}^3,\quad x+y=x'+y \implies x=x'.$
2. $\forall\,(\lambda\,;x)\in \mathbb{K}\times \mathrm{E},\ (-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x).$
   En particulier, $\quad(-1_{\mathbb{K}}).x=-x.$
3. $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,(x\,;y)\in \mathrm{E}^2,\quad \lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y.$
4. $\forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall\,x\in \mathrm{E},\quad (\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x.$
5. $\forall\,x\in \mathrm{E},\quad 0_{\mathbb{K}}.x=0_{\mathrm{E}}$ et $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}.$

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y) \in \mathrm{E}^3, \quad x+y = x'+y \implies x = x'.$
2. $\forall\,(\lambda\,;x) \in \mathbb{K}\times\mathrm{E},\ (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
   En particulier, $\quad (-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
3. $\forall\,\lambda \in \mathbb{K},\ \forall\,(x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad \lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y.$
4. $\forall\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\,x \in \mathrm{E}, \quad (\lambda-\mu).x = \lambda.x - \mu.x.$
5. $\forall\,x \in \mathrm{E}, \quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathrm{E}}$ et $\forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}.$
   Réciproquement, $\forall\,(\lambda\,;x) \in \mathbb{K}\times\mathrm{E}$,
   $$\lambda.x = 0_{\mathrm{E}} \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_{\mathrm{E}}.$$
   En particulier,

Proposition I (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y)\in \mathrm{E}^3,\quad x+y=x'+y \implies x=x'.$
2. $\forall\,(\lambda\,;x)\in \mathbb{K}\times \mathrm{E},\ (-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x).$
   En particulier, $\quad (-1_{\mathbb{K}}).x=-x.$
3. $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,(x\,;y)\in \mathrm{E}^2,\quad \lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y.$
4. $\forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall\,x\in \mathrm{E},\quad (\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x.$
5. $\forall\,x\in \mathrm{E},\quad 0_{\mathbb{K}}.x=0_{\mathrm{E}}$ et $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}.$
   Réciproquement, $\forall\,(\lambda\,;x)\in\mathbb{K}\times \mathrm{E}$,
   $$\lambda.x=0_{\mathrm{E}} \implies \lambda=0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x=0_{\mathrm{E}}.$$
   En particulier,
6. Si $\lambda\neq 0$, alors $\forall\,(x\,;y)\in \mathrm{E}^2,\quad \lambda.x=\lambda.y \implies x=y.$

Proposition 1 (Règles de calcul) :

1. $\forall\,(x;x';y)\in \mathrm{E}^3,\quad x+y=x'+y \implies x=x'.$
2. $\forall\ (\lambda\,;x)\in \mathbb{K}\times \mathrm{E},\ (-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x).$
   En particulier, $\quad (-1_{\mathbb{K}}).x=-x.$
3. $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\ (x\,;y)\in \mathrm{E}^2,\quad \lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y.$
4. $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall\,x\in \mathrm{E},\quad (\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x.$
5. $\forall\,x\in \mathrm{E},\quad 0_{\mathbb{K}}.x=0_{\mathrm{E}}$ et $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}.$
   Réciproquement, $\forall\ (\lambda\,;x)\in\mathbb{K}\times \mathrm{E}$,
   $$\lambda.x=0_{\mathrm{E}} \implies \lambda=0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x=0_{\mathrm{E}}.$$
   En particulier,
6. Si $\lambda\neq 0$, alors $\forall\ (x\,;y)\in \mathrm{E}^2,\quad \lambda.x=\lambda.y \implies x=y.$
7. Si $x\neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.x=\mu.x \implies \lambda=\mu.$

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{R}$ev. On munit l'ensemble $\mathrm{F} = \mathrm{E} \times \mathrm{E}$ de l'addition usuelle et on définit une loi de composition externe $\cdot$ par $(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$.

Montrer que $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ev.

$\mathbb{K}$: L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathbb{K}}} = 0_{\mathbb{K}}$ et muni des lois :

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & x + y = x +_{\mathbb{K}} y \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda \cdot x = \lambda \times_{\mathbb{K}} x. \end{array}$$

Proposition 2 :

$(\mathbb{K}\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En particulier, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
On peut voir aussi $\mathbb{C}$ est comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe :

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\lambda\,;z) & \longmapsto & \lambda.z = \lambda z \quad \text{(produit dans } \mathbb{C}) \end{array}$$

Remarque : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$-ev.

$\mathbb{K}^n$ **:** L'ensemble $\vec{\mathcal{E}}^2$ des vecteurs du plan (de même que l'ensemble $\vec{\mathcal{E}}^3$ des vecteurs de l'espace), muni de la somme vectorielle et du produit des vecteurs par les réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (encore heureux !).

On peut identifier l'espace des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ en identifiant un vecteur avec ses coordonnées dans une base du plan. On y reviendra dans le chapitre sur les applications linéaires.

De manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{K}^n$ les lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n) ; (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (\lambda ; (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{array}.$$

Proposition 3 :

L'ensemble $(\mathbb{K}^n ; + ; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathbb{K}^n}} = (0, 0 \dots, 0)$.

E^n : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n espaces vectoriels $\left(E_1\,;+_{E_1}\,;\cdot_{E_1}\right)$, ..., $\left(E_n\,;+_{E_n}\,;\cdot_{E_n}\right)$ tous sur $\mathbb{K}$ et le produit cartésien

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \left\{(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n) \,/\, \forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\, x_i \in E_i\right\}.$$

On définit sur E les lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ ((x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)\,;(y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n)) & \longmapsto & (x_1 +_{E_1} y_1,\, x_2 +_{E_2} y_2,\, \dots,\, x_n +_{E_n} y_n) \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda\,;(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)) & \longmapsto & (\lambda._{E_1}x_1,\, \lambda._{E_2}x_2,\, \dots,\, \lambda._{E_n}x_n) \end{array}.$$

Proposition 4 :

L'ensemble $(E\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_E} = (\overrightarrow{0_{E_1}},\, \overrightarrow{0_{E_2}}\, \dots,\, \overrightarrow{0_{E_n}})$.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $E = \mathbb{K}$, on retrouve ainsi que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 1 :

Si on note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{E}$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathrm{E}$ alors, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \cdot_{\mathrm{E}} x +_{\mathrm{E}} y = \begin{pmatrix} \lambda \cdot_{\mathrm{E}_1} x_1 +_{\mathrm{E}_1} y_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot_{\mathrm{E}_n} x_n +_{\mathrm{E}_1} y_n \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **:** On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des lois :

$$+: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\,;(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \end{array}$$

et

$$\cdot: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \left(\lambda\,;(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & \lambda\cdot(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}. \end{array}$$

Ainsi doté,

Proposition 5 :

L'ensemble $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot\right)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}} = (0)_{n,p}$.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des lois :

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} ; (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \right) & \longmapsto & (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & \left(\lambda ; (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \right) & \longmapsto & \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}. \end{array}$$

Proposition 5 :

L'ensemble $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}} = (0)_{n,p}$.

ATTENTION

Toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

$\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{E})$ **:** Soient Ω un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{E})$, noté aussi E^{Ω} des fonctions de Ω à valeurs dans E peut être munis des lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}^{\Omega}\times\mathrm{E}^{\Omega} & \longrightarrow & \mathrm{E}^{\Omega} \\ (f\,;g) & \longmapsto & \mathrm{f+g} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & & f(x) +_{\mathrm{E}} g(x) \end{array} \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathrm{E}^{\Omega} & \longrightarrow & \mathrm{E}^{\Omega} \\ (\lambda\,;f) & \longmapsto & \lambda.\mathrm{f} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & & \lambda \cdot_{\mathrm{E}} f(x) \end{array} \end{array}$$

Proposition 6 :

Si Ω est non vide alors l'ensemble $(\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{E})\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathcal{F}(\Omega;\mathrm{E})}}$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\Omega;\mathrm{E})} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & 0_{\mathrm{E}} \end{array}$.

Si $\Omega = \mathbb{R} = \mathbb{K}$, on en déduit, par exemple, que l'ensemble $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}\right)$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Les fonctions cos, exp, ... sont des exemples de vecteurs de cet espace vectoriel.

ATTENTION

$\mathcal{F}\left(\Omega\,;\mathrm{Y}\right)$ n'est, en général, pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois) si Y n'est pas un $\mathbb{K}$-ev.

Comme conséquence avec $\Omega = \mathbb{N}$, on retrouve aussi la propriété suivante prouvée dans un chapitre précédent :

Corollaire I :

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{K}}$.

La somme de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et le produit d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un réel λ étant la suite $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\mathbb{K}[\mathrm{X}]$: L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de vecteur nul le polynôme nul et muni des lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] \times \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \left(\sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k ; \sum_{k\geqslant 0} b_k \mathrm{X}^k\right) & \longmapsto & \sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k)\, \mathrm{X}^k \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \left(\lambda ; \sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k\right) & \longmapsto & \lambda \cdot \sum_{k\geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k = \sum_{k\geqslant 0} (\lambda a_k)\, \mathrm{X}^k. \end{array}$$

En particulier, on a également vu que l'ensemble $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

ATTENTION

L'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.
2. $\varnothing$.

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.
2. $\varnothing$.
3. $\{0, 1\}$.

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.
2. $\varnothing$.
3. $\{0, 1\}$.
4. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\right\}$.

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.
2. $\varnothing$.
3. $\{0, 1\}$.
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$.
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.
2. $\varnothing$.
3. $\{0, 1\}$.
4. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\right\}$.
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.
6. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est croissante}\}$.

Définition 2 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathrm{E}$.
  On dit que $x \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$ de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2 + ... + \lambda_p . x_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot x_k.$$

Définition 2 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathrm{E}$.
  On dit que $x \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_p$ de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + ... + \lambda_p.x_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot x_k.$$

- Soit X une partie de E.
  On dit que $x \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si x est combinaison linéaire d'une famille **finie** de vecteurs de X.

ATTENTION

Il n'y a pas, a priori, unicité des coefficients sans hypothèses supplémentaires sur $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k \cancel{\Longrightarrow} \forall\, k \in [\![1\,;p]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$$

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i}-7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_{E} est $\{0_{\mathrm{E}}\}$.

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_{E} est $\{0_{\mathrm{E}}\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u.

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i}-7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_{E} est $\{0_{\mathrm{E}}\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u.
- Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \cos 3x$.

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_{E} est $\{0_{\mathrm{E}}\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u.
- Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \cos 3x$.
- Si $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

  Plus précisément, $f \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si f est une fonction polynomiale.

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i}-7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_{E} est $\{0_{\mathrm{E}}\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u.
- Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \cos 3x$.
- Si $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = \left\{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\right\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

  Plus précisément, $f \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si f est une fonction polynomiale.

- Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_{E} est $\{0_{\mathrm{E}}\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u.
- Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \cos 3x$.
- Si $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

  Plus précisément, $f \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si f est une fonction polynomiale.

- Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

- Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des $\mathrm{E}_{i,j}$ pour $(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

II. Sous-espace vectoriel

Définition 3 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E, abrégé souvent en sev lorsque :

- $\mathrm{F} \neq \varnothing$

Définition 3 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E, abrégé souvent en sev lorsque :

- $\mathrm{F} \neq \varnothing$
- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{F}^2, \quad x +_{\mathrm{E}} y \in \mathrm{F}$ (stabilité de F pour $+_{\mathrm{E}}$)

Définition 3 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathrm{F}\subset\mathrm{E}$.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E, abrégé souvent en sev lorsque :

- $\mathrm{F}\neq\varnothing$
- $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{F}^2,\quad x+_{\mathrm{E}}y\in\mathrm{F}$ (stabilité de F pour $+_{\mathrm{E}}$)
- $\forall\,x\in\mathrm{F},\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda._{\mathrm{E}}x\in\mathrm{F}$ (stabilité de F pour $\cdot_{\mathrm{E}}$)

Définition 3 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E, abrégé souvent en sev lorsque :

- $\mathrm{F} \neq \varnothing$
- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{F}^2, \quad x +_{\mathrm{E}} y \in \mathrm{F}$ (stabilité de F pour $+_{\mathrm{E}}$)
- $\forall\, x \in \mathrm{F},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot_{\mathrm{E}} x \in \mathrm{F}$ (stabilité de F pour $\cdot_{\mathrm{E}}$)

Exemple 3 :

Si E est un $\mathbb{K}$-ev alors $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E sont des sev de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).

Ce sont, respectivement, le plus petit et le plus grand sev au sens de l'inclusion.

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_E : en effet, $F \neq \varnothing$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_{E} : en effet, $\mathrm{F} \neq \varnothing$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_{\mathrm{E}} = \underbrace{x +_{\mathrm{E}} (-x)}_{\in \mathrm{E}} \in \mathrm{F}.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$. A contrario, une partie ne contenant pas 0_{E} ne pourra être un sev de E.

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_E : en effet, $F \neq \varnothing$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_E \in F$. A contrario, une partie ne contenant pas 0_E ne pourra être un sev de E.

ATTENTION Aucun $\mathbb{K}$-ev, $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}$-ev ou sev n'est vide !!!!

Corollaire 2 (Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires) :

$$\text{F est un sev de E} \iff \begin{cases} 0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F} \\ \forall\ (x\,;y) \in \mathrm{F}^2,\ \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda.x + \mu.y \in \mathrm{F}. \end{cases}$$

Corollaire 2 (Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires) :

$$\text{F est un sev de E} \iff \begin{cases} 0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F} \\ \forall\ (x\,;y) \in \mathrm{F}^2,\ \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda.x + \mu.y \in \mathrm{F}. \end{cases}$$

Remarque : Mieux, on vérifiera que montrer que F est stable par des combinaisons linéaires du type $\lambda.x + y$ est équivalent à montrer que F est stable par combinaisons linéaires.

Le corollaire (2) nous entraîne à considérer les lois :

$$+_{\mathrm{F}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{F}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x +_{\mathrm{E}} y \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot_{\mathrm{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda \cdot_{\mathrm{E}} x \end{array}.$$

Ces lois s'appellent les lois induites sur F (par celles de de E) ou les restrictions des lois de E à F. C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

Le corollaire (2) nous entraîne à considérer les lois :

$$+_{\mathrm{F}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{F}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x +_{\mathrm{E}} y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \cdot_{\mathrm{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda._{\mathrm{E}}x \end{array}.$$

Ces lois s'appellent les lois induites sur F (par celles de de E) ou les restrictions des lois de E à F. C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

Théorème 7 :

Soit F un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$.

Alors, $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{K}$-ev.

Le corollaire (2) nous entraîne à considérer les lois :

$$+_{\mathrm{F}}: \begin{array}{ccc} \mathrm{F}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x +_{\mathrm{E}} y \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot_{\mathrm{F}}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda\cdot_{\mathrm{E}} x \end{array}.$$

Ces lois s'appellent les lois induites sur F (par celles de de E) ou les restrictions des lois de E à F. C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

Théorème 7 :

Soit F un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$.

Alors, $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{K}$-ev.

Considérant une sous-partie F (non vide nécessairement) d'un $\mathbb{K}$-ev E, une des grandes conséquences de ce théorème est qu'il ne nous sera plus nécessaire de montrer les 9 critères de la définition (1) mais seulement de démontrer que F est un sev de E.

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $\mathrm{P} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $\mathrm{P} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- Dans le plan, une droite $(\mathcal{D})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
  Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ ou un plan $(\mathcal{P})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $\mathrm{P} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- Dans le plan, une droite $(\mathcal{D})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
  Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ ou un plan $(\mathcal{P})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble $\mathrm{F} = \{(0, y, y, t) \,/\, (y\,;t) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
  L'ensemble $\mathrm{P} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- Dans le plan, une droite $(\mathcal{D})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
  Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ ou un plan $(\mathcal{P})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble $\mathrm{F} = \{(0, y, y, t) \,/\, (y\,;t) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $\mathrm{F} = \{(x\,;y\,;z) \,/\, x+y+z=0\}$ est un sev mais l'ensemble $\mathrm{G} = \{(x\,;y\,;z) \,/\, x+y+z=1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

  Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^k(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

  Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.

II. Sous-espace vectoriel

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

  Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^k(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

  Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev du $\mathbb{K}$ev vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

  On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

  $$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \sqsubset \mathbb{K}_1[X] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}_n[X] \sqsubset \mathbb{K}_{n+1}[X] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}[X].$$

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
  Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^k(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
  Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev du $\mathbb{K}$ev vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
  On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \sqsubset \mathbb{K}_1[X] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}_n[X] \sqsubset \mathbb{K}_{n+1}[X] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}[X].$$

Remarque : La relation « être un sev » est transitive.

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques,

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques,

sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 7 (Dans l'espace des suites) :

Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$ev des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.

Exemples 7 (Dans l'espace des suites) :

Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$ev des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.
- L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

  Plus précisément,

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

  Plus précisément,

  - $\left\{y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \;/\; y' + a(x)y = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

  Plus précisément,

  - $\left\{y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \;/\; y' + a(x)y = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.
  - $\left\{y \in \mathcal{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \;/\; y'' + ay' + by = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

  Plus précisément,

  - $\left\{y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \;/\; y' + a(x)y = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.
  - $\left\{y \in \mathcal{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \;/\; y'' + ay' + by = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du $\mathbb{K}$ev des suites réelles ou complexes.

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $\mathrm{F}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geqslant 0\}$

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geqslant 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geqslant 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}$

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $\mathrm{F}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geqslant 0\}$
- $\mathrm{F}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$
- $\mathrm{F}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}$
- $\mathrm{F}_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$

Tous les sous-espaces de E sont-ils des sev de E ? La réponse est bien évidemment non mais comment régler ce problème et rajouter un peu de stabilité pour les lois de $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$?
On donne la réponse dans ce paragraphe.

Tous les sous-espaces de E sont-ils des sev de E ? La réponse est bien évidemment non mais comment régler ce problème et rajouter un peu de stabilité pour les lois de $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$?
On donne la réponse dans ce paragraphe.

Soit X une partie d'un espace vectoriel $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$. On cherche le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient X (pour l'inclusion).

Définition 4 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et X une partie de E.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par X, noté $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X})$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X.

On convient que $\mathrm{vect}\,(\varnothing) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Tous les sous-espaces de E sont-ils des sev de E ? La réponse est bien évidemment non mais comment régler ce problème et rajouter un peu de stabilité pour les lois de $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$?
On donne la réponse dans ce paragraphe.

Soit X une partie d'un espace vectoriel $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$. On cherche le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient X (pour l'inclusion).

Définition 4 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et X une partie de E.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par X, noté $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X})$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X.

On convient que $\mathrm{vect}\,(\varnothing) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Exemple 9 :

Dans le plan, si $\mathrm{X} = \{\vec{u}\}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors ce s.e.v est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$:

$$(\mathcal{D}) = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Toute la question est de savoir déterminer, s'il existe, ce plus petit sev.
Cherchons la réponse du côté de l'intersection des sev contenant cette partie.
Une intersection de sev est-elle déjà un sev ? La réponse est oui !

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'intersection $\bigcap\limits_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

Toute la question est de savoir déterminer, s'il existe, ce plus petit sev.
Cherchons la réponse du côté de l'intersection des sev contenant cette partie.
Une intersection de sev est-elle déjà un sev ? La réponse est oui !

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'intersection $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples 10 :

- $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'intersection $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples 10 :

- $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
- $\left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, \forall\, k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'intersection $\bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples 10 :

- $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
- $\left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, \forall\, k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'intersection $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{F}_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples 10 :

- $\mathrm{F}=\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]\,/\,\mathrm{P}(1)=\mathrm{P}(2)=0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
- $\left\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\,/\,\forall\,k\in\mathbb{N}\quad f^{(k)}(0)=0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

ATTENTION

La réunion de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel !!!

Par exemple, dans $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$, si F est l'axe des abscisses et G l'axe des ordonnées, $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$ sont dans $\mathrm{F}\cup\mathrm{G}$ mais pas $(1\,;1)=(1\,;0)+(0\,;1)$.

Exercice 4 :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E un espace vectoriel.

Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff (F \subset G) \text{ ou } (G \subset F).$$

Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) :

Soit X une partie de E.

On note $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X})$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X.

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\mathrm{vect}\,(\mathrm{X}) = \bigcap_{\substack{\mathrm{F}\ \text{sev} \\ \mathrm{X}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F}.$$

Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) :

Soit X une partie de E.

On note $\text{vect}(X)$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X.

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F.$$

Toute d'abord deux propriétés simples mais importantes découlant de la définition par superlatif :

Proposition 9 :

Soit $(E\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

1. F est un sev de E si, et seulement si $F = \text{vect}(F)$.

Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) :

Soit X une partie de E.

On note $\mathrm{vect}\,(X)$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X.

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\mathrm{vect}\,(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F.$$

Toute d'abord deux propriétés simples mais importantes découlant de la définition par superlatif :

Proposition 9 :

Soit $(E\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

1. F est un sev de E si, et seulement si $F = \mathrm{vect}\,(F)$.
2. Pour toutes parties X et Y de E, $X \subset Y \implies \mathrm{vect}\,(X) \subset \mathrm{vect}\,(Y)$.

Exercice 5 :

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{t}$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$.

Montrer que $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$.

Faisons enfin le lien avec l'intérêt majeur de la structure : les combinaisons linéaires.

Théorème 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+)\cdot$ un $\mathbb{K}$-ev X une partie non vide de E.

$$\mathrm{vect}\,(\mathrm{X}) \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de X.}$$

Quoi de plus naturel que de former toutes les combinaisons linéaires possibles des éléments de X pour obtenir le plus petit sous-ensemble stable par combinaisons linéaires d'éléments de X ?

Théorème 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+)\cdot$ un $\mathbb{K}$-ev X une partie non vide de E.

vect (X) est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de X.

Exemple 11 (IMPORTANT) :

Si $\mathrm{X} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est finie, on note $\mathrm{vect}\left(\{e_1, e_2, \dots, e_n\}\right)$ ou plus simplement $\mathrm{vect}\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right)$.

On a alors légalité :

$$\mathrm{vect}\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right) = \left\{\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \dots + \lambda_n.e_n \;/\; (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}.$$

En particulier et à retenir,

$$\boxed{x \in \mathrm{vect}\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right) \iff \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i.}$$

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,
  - $\mathrm{vect}(1) = \mathbb{R}$,

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,
  - $\mathrm{vect}(1) = \mathbb{R}$,
  - $\mathrm{vect}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,
  - $\operatorname{vect}(1) = \mathbb{R}$,
  - $\operatorname{vect}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, $\operatorname{vect}(1) = \operatorname{vect}(\mathrm{i}) = \mathbb{C}$.

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,
  - $\text{vect}\,(1) = \mathbb{R}$,
  - $\text{vect}\,(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, $\text{vect}\,(1) = \text{vect}\,(\mathrm{i}) = \mathbb{C}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\text{vect}\,(\vec{u}\,;\vec{v})$ est un plan vectoriel.

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,
  - $\operatorname{vect}(1) = \mathbb{R}$,
  - $\operatorname{vect}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, $\operatorname{vect}(1) = \operatorname{vect}(\mathrm{i}) = \mathbb{C}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\operatorname{vect}(\vec{u}\,;\vec{v})$ est un plan vectoriel.
- Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,
  - $\operatorname{vect}(1) = \mathbb{R}$,
  - $\operatorname{vect}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, $\operatorname{vect}(1) = \operatorname{vect}(\mathrm{i}) = \mathbb{C}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\operatorname{vect}(\vec{u}\,;\vec{v})$ est un plan vectoriel.
- Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.
- Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles satisfaisant

  $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

  est un sev.

  Mieux, en notant $r_{\pm} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on sait que :

  $$\mathcal{S} = \operatorname{vect}\left((r_+^n)_{n\in\mathbb{N}}\,;(r_-^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

On avait déjà vu que, considérant deux sev F et G de E, $F \cup G$ n'était pas un sev. Cherchons un sev capable de les contenir tous les deux :

Définition 6 :

Soit $(E\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

Si F et G sont deux sev de E, on appelle somme de F et G, notée $F+G$ l'ensemble

$$F+G=\{x+y\,/\,\,(x\,;y)\in F\times G\}\,.$$

On avait déjà vu que, considérant deux sev F et G de E, $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ n'était pas un sev. Cherchons un sev capable de les contenir tous les deux :

Définition 6 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

Si F et G sont deux sev de E, on appelle somme de F et G, notée $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ l'ensemble

$$\mathrm{F}+\mathrm{G} = \left\{ x+y \,/\, (x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} \right\}.$$

En particulier, écrire $\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G}$ signifie que tout vecteur de E peut se décomposer comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G} \iff \forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists\, (x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}.}$$

On avait déjà vu que, considérant deux sev F et G de E, $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ n'était pas un sev. Cherchons un sev capable de les contenir tous les deux :

Définition 6 :

Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

Si F et G sont deux sev de E, on appelle **somme** de F et G, notée $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ l'ensemble

$$\mathrm{F}+\mathrm{G} = \{x+y \,/\, (x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}\}\,.$$

En particulier, écrire $\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G}$ signifie que tout vecteur de E peut se décomposer comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{F}+\mathrm{G} \iff \forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists\, (x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}.}$$

ATTENTION

Il n'y a pas toujours unicité dans cette écriture. Si oui, on parlera alors de somme directe.

Proposition II :

Pour tous sous-espaces F et G de E, $F + G$ est un sev de E.

Proposition 11 :

Pour tous sous-espaces F et G de E, F + G est un sev de E.

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.

Proposition 11 :

Pour tous sous-espaces F et G de E, $F+G$ est un sev de E.

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition 11 :

Pour tous sous-espaces F et G de E, $F+G$ est un sev de E.

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dit autrement, le sev engendré par la réunion de deux droites vectorielles non parallèles est un plan vectoriel.

Proposition 11 :

Pour tous sous-espaces F et G de E, $F + G$ est un sev de E.

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dit autrement, le sev engendré par la réunion de deux droites vectorielles non parallèles est un plan vectoriel.

Remarque : $F + F = F$!

Quid du rapport entre $F + G$ et $F \cup G$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

Quid du rapport entre $F + G$ et $F \cup G$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

Théorème 12 :

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.

$$\mathrm{vect}\,(F \cup G) = F + G.$$

Quid du rapport entre $F + G$ et $F \cup G$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

Théorème 12 :

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.

$$\operatorname{vect}(F \cup G) = F + G.$$

Remarque : $F + G$ est donc le plus petit sev de E au sens de l'inclusion contenant $F \cup G$.

Quid du rapport entre $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $\mathrm{F}\cup\mathrm{G}$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

Théorème 12 :

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.

$$\operatorname{vect}(\mathrm{F}\cup\mathrm{G})=\mathrm{F}+\mathrm{G}.$$

Remarque : $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est donc le plus petit sev de E au sens de l'inclusion contenant $\mathrm{F}\cup\mathrm{G}$.

En particulier,

$$\operatorname{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)+\operatorname{vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)=\operatorname{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m)$$

Définition 7 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont en somme directe, notée $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, lorsque tout élément de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose de manière unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall\, z \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G},\ \exists\,!\,(x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad z = x + y.$$

Définition 7 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$, lorsque tout élément de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose **de manière unique** en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall\, z\in\mathrm{F}\oplus\mathrm{G},\ \exists!\,(x\,;y)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad z=x+y.$$

Proposition 13 :

Soient F,G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.

Définition 7 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont en somme directe, notée $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$, lorsque tout élément de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose de manière unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall\, z\in\mathrm{F}\oplus\mathrm{G},\ \exists!\,(x\,;y)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad z=x+y.$$

Proposition 13 :

Soient F,G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall\ (x\,;x')\in\mathrm{F}^2,\ \forall\ (y\,;y')\in\mathrm{G}^2,\ x+y=x'+y' \implies x=x' \quad \text{et} \quad y=y'.$

Définition 7 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, lorsque tout élément de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose **de manière unique** en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall\, z \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G},\ \exists!\,(x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad z = x + y.$$

Proposition 13 :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall\ (x\,;x') \in \mathrm{F}^2,\ \forall\ (y\,;y') \in \mathrm{G}^2,\ x+y = x'+y' \implies x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$
3. $\forall\, x \in \mathrm{F},\ \forall\, y \in \mathrm{G},\ x + y = 0_{\mathrm{E}} \implies x = y = 0_{\mathrm{E}}.$

Définition 7 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont en somme directe, notée $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, lorsque tout élément de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose de manière unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall\, z \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G},\ \exists!\,(x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad z = x + y.$$

Proposition 13 :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall\,(x\,;x') \in \mathrm{F}^2,\ \forall\,(y\,;y') \in \mathrm{G}^2,\ x+y = x'+y' \implies x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$
3. $\forall\, x \in \mathrm{F},\ \forall\, y \in \mathrm{G},\ x+y = 0_{\mathrm{E}} \implies x = y = 0_{\mathrm{E}}.$
4. $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$

ATTENTION

$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et non $\varnothing$!!!!!!

Exercice 6 :

Montrer que les sev F et G sont en somme directe avec :

1. $F = \mathbb{K}\vec{u}$ et $G = \mathbb{K}\vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
   Dans ce cas, $\mathbb{K}\vec{u} + \mathbb{K}\vec{v} = \mathbb{K}\vec{u} \oplus \mathbb{K}\vec{v} = \text{vect}\,(u\,;v)$.

Exercice 6 :

Montrer que les sev F et G sont en somme directe avec :

1. $\mathrm{F} = \mathbb{K}\vec{u}$ et $\mathrm{G} = \mathbb{K}\vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
   Dans ce cas, $\mathbb{K}\vec{u} + \mathbb{K}\vec{v} = \mathbb{K}\vec{u} \oplus \mathbb{K}\vec{v} = \mathrm{vect}\,(u\,;v)$.
2. $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(1, \mathrm{X})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(1, \mathrm{X}^2)$.

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

Définition 8 :

On dit que la somme de n sous-espaces vectoriels F_1, F_2, ..., F_n d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de F_1, F_2, ..., F_n.

$$\forall\, x \in F_1 + F_2 + \ldots + F_n,\ \exists!\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

La somme directe de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ est notée : $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

Définition 8 :

On dit que la somme de n sous-espaces vectoriels F_1, F_2, ..., F_n d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de F_1, F_2, ..., F_n.

$$\forall\, x \in F_1 + F_2 + \ldots + F_n,\ \exists!\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

La somme directe de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ est notée : $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$

Théorème 14 :

Il y a équivalence entre :

1. La somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe.

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

Définition 8 :

On dit que la somme de n sous-espaces vectoriels F_1, F_2, ..., F_n d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de F_1, F_2, ..., F_n.

$$\forall x \in F_1 + F_2 + \ldots + F_n,\ \exists!\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

La somme directe de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ est notée : $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$

Théorème 14 :

Il y a équivalence entre :

1. La somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe.
2. $\forall p \in \mathbb{N}, 2 \leqslant p \leqslant n,\ \left(F_1 + F_2 + \ldots + F_{p-1}\right) \cap F_p = \{0\}$.

Remarque : Si $F_1 + F_2 + ... + F_n$ est une somme directe alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p \leqslant n, \forall\, q \in \mathbb{N}, 1 \leqslant q \leqslant n, p \neq q : \; F_p \cap F_q = \{0\}.$$

Mais cette condition (qui est nécessaire) pour que la somme soit directe n'est pas suffisante.

Remarque : Si $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est une somme directe alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p \leqslant n, \forall\, q \in \mathbb{N}, 1 \leqslant q \leqslant n, p \neq q : \ F_p \cap F_q = \{0\}.$$

Mais cette condition (qui est nécessaire) pour que la somme soit directe n'est pas suffisante.

Contre-Exemple 14 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soient $F = \operatorname{vect}((1,0))$, $G = \operatorname{vect}((0,1))$ et $H = \operatorname{vect}((1,1))$.

Il est immédiat que $F \cap G = \{0\}, G \cap H = \{0\}$ et $F \cap H = \{0\}$, et pourtant la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

En effet l'élément $(1,1)$ de $F + G + H$ se décompose en somme d'éléments de F, G et H de la manière suivante :

$$(1,1) = (0,0) + (0,0) + (1,1)$$

mais aussi de la manière suivante :

$$(1,1) = (1,0) + (0,1) + (0,0).$$

Il n'y a donc pas unicité de l'écriture.

ATTENTION

Dans le cas de plusieurs sous-espaces vectoriels, le fait que les sous-espaces aient deux à deux une intersection réduite au vecteur nul n'est pas une condition suffisante pour que la somme soit directe.

Définition 9 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont **supplémentaires** (dans E) si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Définition 9 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont **supplémentaires** (dans E) si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

En particulier, $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \forall\, z \in \mathrm{E},\ \exists\,!\,(x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad z = x + y.}$

En conclusion,

ATTENTION

Ne confondez pas « en somme directe » et « supplémentaires dans E ».

Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E a AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour être précis, les vecteurs de $F + G$ ont alors exactement une décomposition de cette forme tandis que les éléments de $E \backslash (F + G)$ n'en ont pas.

Dire que F et G sont supplémentaires dans E, c'est affirmer en plus que $E = F + G$, c'est donc affirmer que tout vecteur de E possède EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

En conclusion,

ATTENTION

Ne confondez pas « en somme directe » et « supplémentaires dans E ».

Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E a AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour être précis, les vecteurs de $F + G$ ont alors exactement une décomposition de cette forme tandis que les éléments de $E \backslash (F + G)$ n'en ont pas.

Dire que F et G sont supplémentaires dans E, c'est affirmer en plus que $E = F + G$, c'est donc affirmer que tout vecteur de E possède EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? La réponse est oui, mais nous le démontrerons un peu plus loin seulement en dimension finie (quand nous saurons ce que ça veut dire).

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i},\vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i}\oplus\mathbb{R}\vec{j}=\vec{\mathcal{E}}^2$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$.

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
  - ◇ $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
  - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
  - ◇ $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
  - • $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Proposition 15 (Caractérisation de la somme directe) :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$

Proposition 15 (Caractérisation de la somme directe) :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \begin{cases} \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}. \end{cases}$$

Exemple 16 :

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1\,;0)$ et $e_2\,(-1\,;1)$.

Montrons que $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,(e_1) \oplus \mathrm{vect}\,(e_2)$.

Soit $(x\,;y) \in \mathrm{E}$. Cherchons $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x\,;y) = a.e_1 + b.e_2$.

Or,

$$(x\,;y) = a.e_1 + b.e_2 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = a - b \\ y = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = x + y \\ b = y \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution, donc la somme est directe
i.e. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}\,(e_1) \oplus \mathrm{vect}\,(e_2)$.

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

- $F = \{(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- $G = \text{vect}\,((1\,;1\,;1))$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

- $\mathrm{F} = \{(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,((1\,;1\,;1))$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. On pose également $\mathrm{H} = \mathrm{vect}\,((1\,;0\,;0))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

- $\mathrm{F} = \{(x_1\,; x_2\,; x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,((1\,;1\,;1))$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. On pose également $\mathrm{H} = \mathrm{vect}\,((1\,;0\,;0))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

ATTENTION

Comme on le voit dans l'exercice, un sous-espace vectoriel a, en général, plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'un supplémentaire et non du supplémentaire.

Méthode 1 :

Soient F et G deux sevs de E. Comment montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$?

Il s'agit, pour un vecteur quelconque x de E, de trouver $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$ uniques tels que $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$.

Le raisonnement par analyse-synthèse est adapté car on ne sait généralement pas quelle forme a la décomposition : on va le découvrir dans l'analyse.

Méthode 1 :

Soient F et G deux sevs de E. Comment montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$?

Il s'agit, pour un vecteur quelconque x de E, de trouver $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$ uniques tels que $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$.

Le raisonnement par analyse-synthèse est adapté car on ne sait généralement pas quelle forme a la décomposition : on va le découvrir dans l'analyse.

Déclaration d'un vecteur à décomposer : On fixe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ sans conditions particulières.

Méthode 1 :

Déclaration d'un vecteur à décomposer : On fixe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ sans conditions particulières.

Analyse : On suppose que x s'écrit sous la forme $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$, où x_{F} est un vecteur de F et x_{G} un vecteur de G.
On essaye ensuite de construire x_{F} et x_{G} uniquement à l'aide de x ou d'autres vecteurs de référence.
On doit trouver un unique couple candidat $(x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}})$. L'unicité de la décomposition est alors acquise. (Sinon la somme n'est pas directe.)

Méthode 1 :

Déclaration d'un vecteur à décomposer : On fixe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ sans conditions particulières.

Analyse : On suppose que x s'écrit sous la forme $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$, où x_{F} est un vecteur de F et x_{G} un vecteur de G.
On essaye ensuite de construire x_{F} et x_{G} uniquement à l'aide de x ou d'autres vecteurs de référence.
On doit trouver un unique couple candidat $(x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}})$. L'unicité de la décomposition est alors acquise. (Sinon la somme n'est pas directe.)

Synthèse : On considère le couple $(x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}})$ exhibé dans l'analyse et on montre qu'il satisfait les qualités requises i.e. $x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}} = x$, $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$.

Qu'est ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?

Définition 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou, plus simplement, une application linéaire si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y).$

Définition 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou, plus simplement, une application linéaire si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y).$
- $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \quad f(\lambda._{\mathrm{E}} x) = \lambda._{\mathrm{F}} f(x).$

Définition 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou, plus simplement, une application linéaire si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y)$.
- $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \quad f(\lambda ._{\mathrm{E}} x) = \lambda ._{\mathrm{F}} f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Définition 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou, plus simplement, une application linéaire si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y).$
- $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \quad f(\lambda._{\mathrm{E}} x) = \lambda._{\mathrm{F}} f(x).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Vocabulaire :

- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une forme linéaire.

Définition 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou, plus simplement, une application linéaire si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y).$
- $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \quad f(\lambda ._{\mathrm{E}} x) = \lambda ._{\mathrm{F}} f(x).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Vocabulaire :

- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une forme linéaire.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un isomorphisme.

Définition 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou, plus simplement, une application linéaire si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y)$.
- $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \quad f(\lambda._{\mathrm{E}} x) = \lambda._{\mathrm{F}} f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Vocabulaire :

- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une forme linéaire.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un isomorphisme.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$ est linéaire, on dit que f est un endomorphisme.
  Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Définition 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels ou, plus simplement, une application linéaire si :

- $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\quad f(x+_{\mathrm{E}}y)=f(x)+_{\mathrm{F}}f(y)$.
- $\forall\ (\lambda\,;x)\in\mathbb{K}\times\mathrm{E},\quad f(\lambda._{\mathrm{E}}x)=\lambda._{\mathrm{F}}f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Vocabulaire :

- Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une forme linéaire.
- Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un isomorphisme.
- Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{E}$ est linéaire, on dit que f est un endomorphisme.
  Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
- Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{E}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un automorphisme.
  Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Autrement dit, une application linéaire est une application compatible avec les deux opérations définissant la structure d'espace vectoriel.

Autrement dit, une application linéaire est une application compatible avec les deux opérations définissant la structure d'espace vectoriel.

ATTENTION

L'application $\ln : (\mathbb{R}_+^* \,;\times) \longmapsto (\mathbb{R}\,;+)$ est également appelé un morphisme mais non un homomorphisme car $(\mathbb{R}_+^* \,;\times)$ n'est pas un espace vectoriel.

De même, les homéomorphismes et autres difféomorphismes rencontrés en analyse n'ont, en général, rien à voir avec des morphismes. Juste un choix de nom malheureux.

Exemples 17 :

- $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.

  C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

Exemples 17 :

- $\forall k \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.

  C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_{\mathrm{E}}$.

Exemples 17 :

- $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.

  C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_{\mathrm{E}}$.

- Les applications $x \longmapsto x^2$, $\dfrac{1}{x}$, $\cos(x)$, $\sqrt{x}$, e^x, ... ne sont pas linéaires !!!!!

Exemples 17 :

- $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.

  C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_{\mathrm{E}}$.

- Les applications $x \longmapsto x^2$, $\dfrac{1}{x}$, $\cos(x)$, $\sqrt{x}$, e^x, ... ne sont pas linéaires !!!!!

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, -x, 3y) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemples 17 :

- $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.

  C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a: \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_{\mathrm{E}}$.

- Les applications $x \longmapsto x^2$, $\dfrac{1}{x}$, $\cos(x)$, $\sqrt{x}$, e^x, ... ne sont pas linéaires !!!!!

- $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, -x, 3y) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

- $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3, 4+y, -x+2y) \end{array}$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On pourra notamment constater que $f(2x\,;2y) \neq 2f(x\,;y)$.

Proposition 16 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev et $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$.

1. $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \implies f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}$.

Proposition 16 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev et $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$.

1. $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \implies f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}$.
2. $$\begin{aligned} f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) &\iff \forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2, \forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2, \\ &\qquad\qquad f(\lambda\cdot_{\mathrm{E}}x+\mu\cdot_{\mathrm{E}}y)=\lambda\cdot_{\mathrm{F}}f(x)+\mu\cdot_{\mathrm{F}}f(y) \\ &\iff \forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2, \forall\,\lambda\in\mathbb{K}, \quad f(\lambda\cdot_{\mathrm{E}}x+y)=\lambda\cdot_{\mathrm{F}}f(x)+f(y). \end{aligned}$$

Proposition 16 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev et $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$.

1. $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \implies f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}$.
2. $$\begin{aligned} f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) &\iff \forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2, \forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2, \\ &\qquad\qquad f(\lambda\cdot_{\mathrm{E}}x+\mu\cdot_{\mathrm{E}}y)=\lambda\cdot_{\mathrm{F}}f(x)+\mu\cdot_{\mathrm{F}}f(y) \\ &\iff \forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad f(\lambda\cdot_{\mathrm{E}}x+y)=\lambda\cdot_{\mathrm{F}}f(x)+f(y). \end{aligned}$$
3. La restriction d'une application linéaire à un sev reste linéaire :
$$\forall\,\mathrm{A}\text{ sev de }\mathrm{E}\ \text{ et }\ f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}),\quad f_{|\mathrm{A}}\in\mathcal{L}(\mathrm{A}\,;\mathrm{F}).$$

Proposition 16 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev et $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$.

1. $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \implies f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}$.
2. $$\begin{aligned} f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) &\iff \forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2, \forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2, \\ &\qquad\qquad f(\lambda\cdot_{\mathrm{E}}x+\mu\cdot_{\mathrm{E}}y)=\lambda\cdot_{\mathrm{F}}f(x)+\mu\cdot_{\mathrm{F}}f(y) \\ &\iff \forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2, \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad f(\lambda\cdot_{\mathrm{E}}x+y)=\lambda\cdot_{\mathrm{F}}f(x)+f(y). \end{aligned}$$
3. La restriction d'une application linéaire à un sev reste linéaire :
$$\forall\,\mathrm{A}\text{ sev de }\mathrm{E}\ \text{ et }\ f\in\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}),\quad f_{|\mathrm{A}}\in\mathcal{L}(\mathrm{A}\,;\mathrm{F}).$$

ATTENTION

Si f est linéaire alors $f(0)=0$, mais la réciproque est fausse.

En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0)=0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.

Pour toute application linéaire f :

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i . e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . f(e_i)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}.}$$

Pour toute application linéaire f :

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.f(e_i)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}.}$$

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffit par exemple, au choix,

1. de vérifier que $f(0_{\mathrm{E}})\neq 0_{\mathrm{F}}$,

Pour toute application linéaire f :

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.f(e_i)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(0_E)=0_F.}$$

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffit par exemple, au choix,

1. de vérifier que $f(0_E)\neq 0_F$,
2. d'exhiber un couple particulier de vecteurs (x,y) et un couple particulier de scalaires (λ,μ) pour lesquels $f(\lambda x+\mu y)\neq \lambda f(x)+\mu f(y)$.

Pour toute application linéaire f :

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.f(e_i)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}.}$$

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffit par exemple, au choix,

1. de vérifier que $f(0_{\mathrm{E}})\neq 0_{\mathrm{F}}$,
2. d'exhiber un couple particulier de vecteurs (x,y) et un couple particulier de scalaires (λ,μ) pour lesquels $f(\lambda x+\mu y)\neq \lambda f(x)+\mu f(y)$.
3. de montrer que $f(-x)\neq -f(x)$ pour un vecteur $x\in\mathrm{E}$ particulier.

Exemples 18 :

Les applications ci-dessous ne sont pas linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ est un endomorphisme de E, appelé homothétie de E de rapport λ. En particulier, Id_E est linéaire.

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ est un endomorphisme de E, appelé homothétie de E de rapport λ. En particulier, $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est un endomorphisme.

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ est un endomorphisme de E, appelé homothétie de E de rapport λ. En particulier, $\mathrm{I}d_\mathrm{E}$ est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}$ est un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathcal{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: $\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

Ce n'est pas un endomorphisme.

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ est un endomorphisme de E, appelé homothétie de E de rapport λ. En particulier, Id_E est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}$ est un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathcal{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$: $\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

Ce n'est pas un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{K})$: $\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est un endomorphisme.

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'intégrale sur $[a\,;b]$: $\mathcal{J}: \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0([a\,;b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'intégrale sur $[a\,;b]$: $\mathcal{I} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a\,;b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

L'évaluation en a : si A est un ensemble non vide, alors pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$e_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathrm{A},\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array} \quad \text{est une forme linéaire.}$$

Idem pour l'évaluation des polynômes en un $a \in \mathbb{K}$ donné

$$e_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a). \end{array}$$

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'intégrale sur $[a\,;b]$: $\mathcal{I}:\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^0([a\,;b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$ est une forme linéaire.

L'évaluation en a : si A est un ensemble non vide, alors pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$e_a:\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(\mathrm{A},\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ f & \longmapsto & f(a)\end{array}\quad \text{est une forme linéaire.}$$

Idem pour l'évaluation des polynômes en un $a \in \mathbb{K}$ donné

$$e_a:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a).\end{array}$$

La transposition matricielle : $\tau:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})\\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top\end{array}$ est linéaire.

Exemples 19 (Exemples de référence) :

La trace : $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(\mathrm{M}) \end{array}$ est une forme linéaire.

Exemples 19 (Exemples de référence) :

La trace : $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(\mathrm{M}) \end{array}$ est une forme linéaire.

Partie réelle, imaginaire, conjugaison : sont $\mathbb{R}$-linéaires mais pas $\mathbb{C}$-linéaires.

$$\mathfrak{R} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Re}\,(z) \end{array}, \quad \mathfrak{I} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Im}\,(z) \end{array} \quad \text{et} \quad c : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z}. \end{array}$$

Exemples 19 (Exemples de référence) :

La trace : $\mathrm{T}:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(\mathrm{M})\end{array}$ est une forme linéaire.

Partie réelle, imaginaire, conjugaison : sont $\mathbb{R}$-linéaires mais pas $\mathbb{C}$-linéaires.

$$\Re:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Re}\,(z)\end{array},\ \Im:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Im}\,(z)\end{array}\quad \text{et}\quad c:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z}.\end{array}$$

L'application limite :

$$\Lambda:\begin{array}{ccc}\left\{\begin{array}{c}\text{suites convergentes} \\ \text{de } \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\end{array}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n\end{array}\quad \text{est une forme linéaire.}$$

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'application canonique associée à une matrice : si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$f_{\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'application canonique associée à une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

La projection : Soient E_1, E_2, ..., E_n des $\mathbb{K}$-ev.

$$p_i : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est une application linéaire de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans E_i appelée projection sur E_i (parallèlement aux E_j, $j \neq i$).

Exercice 8 :

1. Donner l'application canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 :

1. Donner l'application canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. À quelle matrice est associée $\varphi : (x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x + 4y, 5x + 6y)$?

Proposition 17 :

$(\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev, sev de $(\mathcal{F}(\mathrm{E};\mathrm{F}),+,\cdot)$.

Proposition 17 :

$(\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev, sev de $(\mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}), +, \cdot)$.

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que si, pour tout x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

Proposition 18 :

1. La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
   En particulier, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$.

Proposition 18 :

1. La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
   En particulier, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$.
2. La composée est elle-même bilinéaire :
   En effet, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors :
   - $h \longmapsto g \circ h$ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à droite)**.
   - $h \longmapsto h \circ f$ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à gauche)**.

Proposition 18 :

1. La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
   En particulier, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$.
2. La composée est elle-même bilinéaire :
   En effet, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors :
   - $h \longmapsto g \circ h$ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à droite)**.
   - $h \longmapsto h \circ f$ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à gauche)**.

Remarque : $h \longmapsto g \circ h \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,;\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})\Big)$.

Dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ et satisfait à la loi externe :
$\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g$.
On dit alors que $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non intègre et non commutative.
Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ et satisfait à la loi externe :
$\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g$.
On dit alors que $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non intègre et non commutative.
Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \ldots + +a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on peut aussi définir le polynôme d'endomorphisme $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = a_0 f^0 + a_1 f^1 + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n \quad \text{où } f^0 = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}},\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ \ldots$$

Dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait à la loi externe :
$\lambda.(f\circ g) = f\circ(\lambda.g) = (\lambda.f)\circ g$.
On dit alors que $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non intègre et non commutative.
Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \ldots + +a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on peut aussi définir le polynôme d'endomorphisme $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = a_0 f^0 + a_1 f^1 + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n \quad \text{où } f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E},\ f^1 = f,\ f^2 = f\circ f,\ \ldots$$

Exemples 20 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

- Si $\mathrm{P} = \lambda \in \mathbb{K}$ alors $\mathrm{P}(f) = \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Dans $\mathcal{L}(E)$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait à la loi externe :
$\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g$.
On dit alors que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non intègre et non commutative.
Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $P = a_0 + a_1X + ... + +a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut aussi définir le polynôme d'endomorphisme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = a_0f^0 + a_1f^1 + a_2f^2 + ... + a_nf^n \quad \text{où } f^0 = \mathrm{Id}_E,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ ...$$

Exemples 20 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $P = \lambda \in \mathbb{K}$ alors $P(f) = \lambda \mathrm{Id}_E$.
- Si $P = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$ alors

$$P(f) = f^2 + f - 6\mathrm{Id}_E = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f + 3\mathrm{Id}_E).$$

Exemples 21 :

- Si $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^2}$.

Exemples 21 :

- Si $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^2}$.

- Si $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$ et $u^2 = 2\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^2}$.

Proposition 19 :

Soient $(f\,;g) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ deux endomorphismes qui **commutent** *i.e.* $f \circ g = g \circ f$.

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

Proposition 19 :

Soient $(f\,;g) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ deux endomorphismes qui **commutent** *i.e.* $f \circ g = g \circ f$.

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = (f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

ATTENTION

Les écritures $f^k g^{n-k}$ et $(f-g)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$ sont respectivement à comprendre $f^k \circ g^{n-k}$ et $(f-g) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}\right)$.

Remarque : Les homothéties $\lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Remarque : Les homothéties $\lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Exemples 22 :

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on a :

$$(f + \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$f^n - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}} = (f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \circ \left(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} + f + f^2 + \cdots + f^{(n-1)} \right).$$

Remarque : Les homothéties $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Exemples 22 :

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on a :

$$(f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$f^n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = (f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f + f^2 + \cdots + f^{(n-1)}\right).$$

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de E.

Remarque : Les homothéties $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Exemples 22 :

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on a :

$$(f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$f^n - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = (f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f + f^2 + \cdots + f^{(n-1)}\right).$$

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Montrer que $\mathrm{E} = \ker\,(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker\,(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

IV. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 20 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. Pour tout sev E_1 de E, l'ensemble $f(\mathrm{E}_1)$ est un sev de F.

Proposition 20 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. Pour tout sev E_1 de E, l'ensemble $f(\mathrm{E}_1)$ est un sev de F.
2. Pour tout sev F_1 de F, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{F}_1)$ est un sev de E.

Proposition 20 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. Pour tout sev E_1 de E, l'ensemble $f(\mathrm{E}_1)$ est un sev de F.
2. Pour tout sev F_1 de F, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{F}_1)$ est un sev de E.

ATTENTION

La notation f^{-1} est à prendre comme l'image réciproque par f ici.

La proposition (20) nous encourage à nous intéresser à deux sev bien particuliers :

Définition 11 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

1. On appelle **noyau** de f, et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E s'envoyant sur le vecteur nul de F.

$$\ker f = f^{-1}\left(\{0_{\mathrm{F}}\}\right) = \{x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = 0_{\mathrm{F}}\} \subset \mathrm{E}.$$

La proposition (20) nous encourage à nous intéresser à deux sev bien particuliers :

Définition 11 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. On appelle **noyau** de f, et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E s'envoyant sur le vecteur nul de F.

$$\ker f = f^{-1}\left(\{0_{\mathrm{F}}\}\right) = \{x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = 0_{\mathrm{F}}\} \subset \mathrm{E}.$$

2. On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E.

$$\mathrm{Im}\, f = f(\mathrm{E}) = \{y \in \mathrm{F}, \quad \exists x \in \mathrm{E}, y = f(x)\} \subset \mathrm{F}.$$

À retenir :

- $\mathrm{Im}\,(u) = \{0_{\mathrm{F}}\} \iff u = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \iff \ker(u) = \mathrm{E}.$

À retenir :

- $\mathrm{Im}\,(u) = \{0_{\mathrm{F}}\} \iff u = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \iff \ker(u) = \mathrm{E}.$
- Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Alors,

$$v \circ u = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})} \iff \mathrm{Im}\,(u) \subset \ker(v)\,.$$

Exemples 23 (Images) :

- Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 2x) \end{array}$ alors $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{vect}\,((1,2))$ est représenté par la droite d'équation $y = 2x$ dans le plan.

Exemples 23 (Images) :

- Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 2x) \end{array}$ alors $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{vect}\,((1,2))$ est représenté par la droite d'équation $y = 2x$ dans le plan.
- L'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $v : (x,y,z) \longmapsto (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z)$ est le plan d'équation $z = x$.

Exemples 23 (Images) :

- Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 2x) \end{array}$ alors $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{vect}\,((1,2))$ est représenté par la droite d'équation $y = 2x$ dans le plan.
- L'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $v : (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$ est le plan d'équation $z = x$.

ATTENTION

$v\,(1\,;-1\,;1) = (0\,;0\,;0)$ *i.e.* $(1\,;-1\,;1) \in \ker v$ sans qu'il soit nul.

Les éléments du noyau d'une application linéaire ne sont pas tous nuls. C'est là le point intéressant.

Exemples 24 (Noyaux) :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.

Exemples 24 (Noyaux) :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.

- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est l'application linéaire de dérivation, alors $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I.

Exemples 24 (Noyaux) :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est l'application linéaire de dérivation, alors $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I.
- Si $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a) \end{array}$, alors $\ker(f_a) = \{(\mathrm{X}-a)\mathrm{Q} \,/\, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$.

Exemple 25 (Projection) :

Soit l'application linéaire définie par

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0). \end{array}$$

Noyau : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad (x,y)\in\ker p \iff p((x,y))=(0,0)$

$$\begin{aligned} &\iff (x,0)=(0,0) \\ &\iff x=0. \end{aligned}$$

Donc, $\ker(p)=\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des ordonnées.

Exemple 25 (Projection) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,0). \end{array}$$

Noyau : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\ker p \iff p((x,y))=(0,0)$
$\iff (x,0)=(0,0)$
$\iff x=0.$

Donc, $\ker(p)=\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des ordonnées.

Image : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\operatorname{Im}p \iff \exists(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2, p((x_0,y_0))=(x,y)$
$\iff \exists(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2, (x_0,0)=(x,y)$
$\iff y=0.$

Donc, $\operatorname{Im}(p)=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des abscisses.

Proposition 21 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. $\ker f$ est un sev de E.

Proposition 21 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. $\ker f$ est un sev de E.
2. $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.

Proposition 21 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. $\ker f$ est un sev de E.
2. $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.

Exercice 11 :

Déterminer le noyau de $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' + 4f. \end{array}$

Théorème 22 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. f est injective $\iff \ker f = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Théorème 22 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. f est injective $\iff \ker f = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
2. f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Théorème 22 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. f est injective $\iff \ker f = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
2. f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

La plus grande utilité de ce théorème est donc de ramener l'étude de l'injectivité d'une application linéaire à celle de son noyau.

Théorème 22 :

Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. f est injective $\iff \ker f = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
2. f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Réponse : *Un Kinder injectif car son noyaux est réduit à zéro.*

La plus grande utilité de ce théorème est donc de ramener l'étude de l'injectivité d'une application linéaire à celle de son noyau.

Exemple 26 (Symétrie) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{S}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

$$\textbf{Noyau : } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{aligned} (x,y)\in\ker\mathrm{S} &\iff p((x,y))=(0,0). \\ &\iff (-x,y)=(0,0) \\ &\iff (x,y)=(0,0) \end{aligned}$$

Donc, $\ker(\mathrm{S})=\{(0,0)\}$ et S est injective.

Exemple 26 (Symétrie) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{S}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

Noyau : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\ker\mathrm{S} \iff p((x,y))=(0,0).$

$$\iff (-x,y)=(0,0)$$

$$\iff (x,y)=(0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S})=\{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)=\mathrm{S}((-x,y))$ *i.e.* $\mathrm{Im}\,(\mathrm{S})=\mathbb{R}^2$.
L'application S est donc surjective.

Exemple 26 (Symétrie) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{S} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

Noyau : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\ker \mathrm{S} \iff p((x,y))=(0,0).$

$$\iff (-x,y)=(0,0)$$

$$\iff (x,y)=(0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S})=\{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)=\mathrm{S}((-x,y))$ *i.e.* $\mathrm{Im}\,(\mathrm{S})=\mathbb{R}^2$.
L'application S est donc surjective.

Conclusion : $\mathrm{S}\in\mathcal{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exemples 27 :

- Toute homothétie non nulle est surjective.

Exemples 27 :

- Toute homothétie non nulle est surjective.
- $\begin{array}{rccc} D: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$ n'est pas surjective.

Exemples 27 :

- Toute homothétie non nulle est surjective.
- $D: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ n'est pas surjective.
- $T: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([-1\,;1]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ n'est pas injective.