Probabilités

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 24

Sommaire I

Un médecin annonce à un de ses patients :

- J'ai une bonne et une mauvaise nouvelle, je commence par la mauvaise.

Vous avez une maladie grave dont on ne guérit qu'avec une probabilité de 1 sur 10.

- Et la bonne nouvelle docteur ?

- Mes neuf derniers patients sont morts...

Un médecin annonce à un de ses patients :

- J'ai une bonne et une mauvaise nouvelle, je commence par la mauvaise.

Vous avez une maladie grave dont on ne guérit qu'avec une probabilité de 1 sur 10.

- Et la bonne nouvelle docteur ?

- Mes neuf derniers patients sont morts...

Le concept de probabilité est a priori relativement intuitif : rien de surprenant à ce qu'un dé à six faces normalement constitué tombe en moyenne une fois sur six sur chacune de ses faces (il s'agit toutefois d'un résultat statistique, qui ne garantit par exemple en aucun cas qu'au bout de six lancers on aura obtenu chacun des six résultats possibles).

Les probabilités étudiées au lycée restent la plupart du temps dans ce cadre : nombre fini de possibilités, probabilité égale pour chacun des cas possibles, mais en fait, l'étude des probabilités en mathématiques peut se faire dans un cadre beaucoup plus large.

I. Expérience aléatoire

Définition 1 :

On appelle :

- expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut prédire l'issue avec certitude.

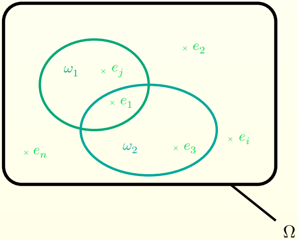


Figure 1 – Univers et événements

Définition 1 :

On appelle :

- expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut prédire l'issue avec certitude.
- univers l'ensemble, souvent noté Ω, de toutes les issues possibles.

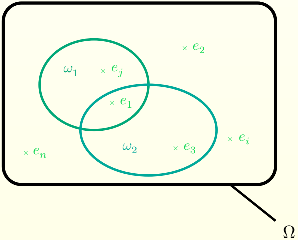


Figure 1 – Univers et événements

Définition 1 :

On appelle :

- expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut prédire l'issue avec certitude.
- univers l'ensemble, souvent noté Ω, de toutes les issues possibles.
- événement, éventualité ou encore issue toute partie ω de l'univers Ω.

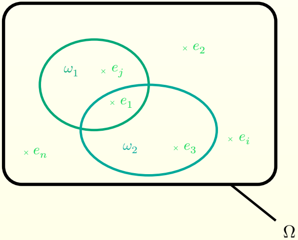


Figure 1 – Univers et événements

I. Expérience aléatoire

1. L'Univers

Définition 1 :

On appelle :

- expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut prédire l'issue avec certitude.
- univers l'ensemble, souvent noté Ω, de toutes les issues possibles.
- événement, éventualité ou encore issue toute partie ω de l'univers Ω.
- événement élémentaire tout événement constitué d'une seule issue ou d'un seul élément.

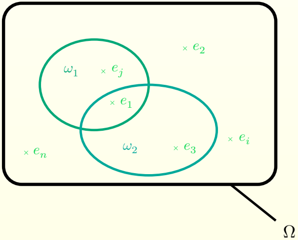


Figure 1 – Univers et événements

I. Expérience aléatoire
1. L'Univers

Les probabilités au programme de PTSI sont les probabilités dites finies, c'est à dire qu'on supposera pour cette année que l'univers est un ensemble fini. Pour information, il y a également des probabilités dites discrètes (ω est fini ou dénombrable - par exemple $\Omega = \mathbb{N}$ - au programme de deuxième année) et des probabilités continues (Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ - hors programme en classes préparatoires scientifiques)

Remarques :

- L'expérience est aléatoire : on ne sait pas à l'avance quelle en sera l'issue. Mais on suppose qu'on connaît l'ensemble des issues possibles.

Les probabilités au programme de PTSI sont les probabilités dites finies, c'est à dire qu'on supposera pour cette année que l'univers est un ensemble fini. Pour information, il y a également des probabilités dites discrètes (ω est fini ou dénombrable - par exemple $\Omega = \mathbb{N}$ - au programme de deuxième année) et des probabilités continues (Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ - hors programme en classes préparatoires scientifiques)

Remarques :

- L'expérience est aléatoire : on ne sait pas à l'avance quelle en sera l'issue. Mais on suppose qu'on connaît l'ensemble des issues possibles.
- Il peut exister plusieurs modélisations associées à une même expérience aléatoire, et à chacune, on associera un univers différent. Pour le lancer du dé, on pourrait s'intéresser à la position du dé sur la table, ou la température de la pièce après le lancer... L'univers serait alors non plus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mais $[0, 3] \times [0, 2]$ ou $\mathbb{R}_+$. Il faut donc toujours commencer par préciser l'univers avec lequel on travaille.

I. Expérience aléatoire

1. L'Univers

Les probabilités au programme de PTSI sont les probabilités dites finies, c'est à dire qu'on supposera pour cette année que l'univers est un ensemble fini. Pour information, il y a également des probabilités dites discrètes (ω est fini ou dénombrable - par exemple $\Omega = \mathbb{N}$ - au programme de deuxième année) et des probabilités continues (Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ - hors programme en classes préparatoires scientifiques)

Remarques :

- L'expérience est aléatoire : on ne sait pas à l'avance quelle en sera l'issue. Mais on suppose qu'on connaît l'ensemble des issues possibles.
- Il peut exister plusieurs modélisations associées à une même expérience aléatoire, et à chacune, on associera un univers différent. Pour le lancer du dé, on pourrait s'intéresser à la position du dé sur la table, ou la température de la pièce après le lancer... L'univers serait alors non plus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mais $[0, 3] \times [0, 2]$ ou $\mathbb{R}_+$. Il faut donc toujours commencer par préciser l'univers avec lequel on travaille.
- Toute partie d'un univers fini est appelée un événement. L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$ (dont on connaît le cardinal)

I. Expérience aléatoire
1. L'Univers

Exemples 1 :

1. On lance un dé. Les résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il y six événements élémentaires : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ à ne pas confondre avec les issues.

$A = \{2, 4, 6\}$ est un événement. Il peut être décrit par une phrase : A :« Obtenir un nombre pair »

Exemples 1 :

1. On lance un dé. Les résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il y six événements élémentaires : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ à ne pas confondre avec les issues.

$\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$ est un événement. Il peut être décrit par une phrase : A :« Obtenir un nombre pair »

2. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Les résultats possibles sont : $7\heartsuit$, $7\diamondsuit$, $7\spadesuit$, $7\clubsuit$, $8\heartsuit$, $\cdots$, $\mathrm{A}\heartsuit$, $\mathrm{A}\diamondsuit$, $\mathrm{A}\spadesuit$, $\mathrm{A}\clubsuit$.

$$\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \cdots, \mathrm{A}\heartsuit, \mathrm{A}\diamondsuit, \mathrm{A}\spadesuit, \mathrm{A}\clubsuit\}$$

L'événement K:« Tirer un roi » : est $\mathrm{K} = \{\mathrm{R}\heartsuit, \mathrm{R}\diamondsuit, \mathrm{R}\spadesuit, \mathrm{R}\clubsuit\}$.

I. Expérience aléatoire

1. L'Univers

Exemples 1 :

1. On lance un dé. Les résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   Il y six événements élémentaires : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ à ne pas confondre avec les issues.

   $A = \{2, 4, 6\}$ est un événement. Il peut être décrit par une phrase : A :« Obtenir un nombre pair »

2. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

   Les résultats possibles sont : $7\heartsuit$, $7\diamondsuit$, $7\spadesuit$, $7\clubsuit$, $8\heartsuit$, $\cdots$, $A\heartsuit$, $A\diamondsuit$, $A\spadesuit$, $A\clubsuit$.

$$\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \cdots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$$

   L'événement K:« Tirer un roi » : est $K = \{R\heartsuit, R\diamondsuit, R\spadesuit, R\clubsuit\}$.

3. Le temps d'attente avant la désintégration d'un noyau radioactif est un réel positif.

$$\Omega = \mathbb{R}_+$$

   Remarque : lorsque l'univers est infini toutes les parties de Ω ne sont pas des événements.

Définition 2 :

Soit Ω un univers fini.

On appelle :

- événement impossible l'ensemble vide : $\varnothing$

Définition 2 :

Soit Ω un univers fini.

On appelle :

- événement impossible l'ensemble vide : $\varnothing$
- événement certain l'univers entier : Ω

Définition 3 :

Soient A et B deux événements d'un univers fini Ω.

- Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{\mathrm{A}}$, est appelé événement contraire à A.

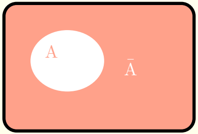


Figure 2 – Événement contraire

Définition 3 :

Soient A et B deux événements d'un univers fini Ω.

- Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{\mathrm{A}}$, est appelé événement contraire à A.
- La réunion $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ de A et B est un événement appelé « A ou B ».

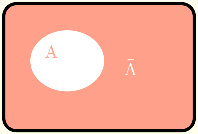


Figure 2 – Événement contraire

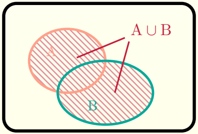


Figure 3 – Événement réunion

Définition 3 :

Soient A et B deux événements d'un univers fini Ω.

- Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, est appelé événement contraire à A.
- La réunion $A \cup B$ de A et B est un événement appelé « A ou B ».
- L'intersection $A \cap B$ de A et B est un événement appelé « A et B ».

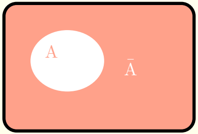


Figure 2 – Événement contraire

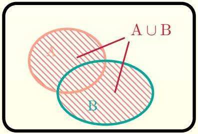


Figure 3 – Événement réunion

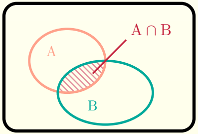


Figure 4 – Événement intersection

Définition 3 :

Soient A et B deux événements d'un univers fini Ω.

- Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, est appelé événement contraire à A.
- La réunion $A \cup B$ de A et B est un événement appelé « A ou B ».
- L'intersection $A \cap B$ de A et B est un événement appelé « A et B ».
- Lorsque « A et B » est l'événement impossible (*i.e.* $A \cap B = \varnothing$) les événements A et B sont dits incompatibles.

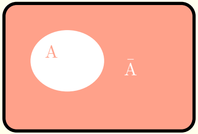


Figure 2 – Événement contraire

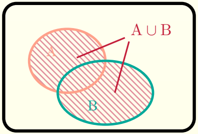


Figure 3 – Événement réunion

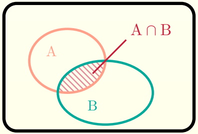


Figure 4 – Événement intersection

Exemple 2 :

Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{P, F\}^2$.

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.* $A = \{(P\,;P)\,,(P\,;F)\}$

Exemple 2 :

Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^2$.

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.* $\mathrm{A} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{P}\,;\mathrm{F})\}$
- B l'événement « la deuxième pièce montre pile » *i.e.* $\mathrm{B} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{F}\,;\mathrm{P})\}$.

Exemple 2 :

Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{P, F\}^2$.

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.* $A = \{(P\,;P)\,,(P\,;F)\}$
- B l'événement « la deuxième pièce montre pile » *i.e.* $B = \{(P\,;P)\,,(F\,;P)\}$.

1. L'événement $A \cup B$ est « une des deux pièces montre pile » *i.e.*

$$A \cup B = \{(F\,;P)\,,(P\,;P)\,,(P\,;F)\}\,.$$

I. Expérience aléatoire

1. L'Univers

Exemple 2 :

Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^2$.

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.* $\mathrm{A} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{P}\,;\mathrm{F})\}$
- B l'événement « la deuxième pièce montre pile » *i.e.* $\mathrm{B} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{F}\,;\mathrm{P})\}$.

1. L'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est « une des deux pièces montre pile » *i.e.*

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{(\mathrm{F}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{P}\,;\mathrm{F})\}.$$

2. L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est « les deux pièces montrent pile » *i.e.*

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P})\}.$$

I. Expérience aléatoire

1. L'Univers

Exemple 2 :

Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{P, F\}^2$.

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.* $A = \{(P\,;P)\,,(P\,;F)\}$
- B l'événement « la deuxième pièce montre pile » *i.e.* $B = \{(P\,;P)\,,(F\,;P)\}$.

1. L'événement $A \cup B$ est « une des deux pièces montre pile » *i.e.*

$$A \cup B = \{(F\,;P)\,,(P\,;P)\,,(P\,;F)\}\,.$$

2. L'événement $A \cap B$ est « les deux pièces montrent pile » *i.e.*

$$A \cap B = \{(P\,;P)\}\,.$$

3. L'événement contraire de A « la première pièce montre face » *i.e.*

$$\overline{A} = \{(F\,;P)\,,(F\,;F)\}\,.$$

Définition 4 :

Soit Ω un univers fini.

On appelle système complet d'événements de Ω toute famille $(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

1. $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{A}_i \neq \varnothing$ (non vides)

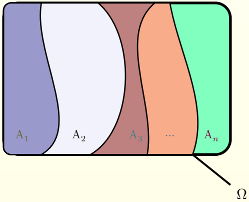


Figure 5 – Système complet d'événements.

Définition 4 :

Soit Ω un univers fini.

On appelle système complet d'événements de Ω toute famille $(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

1. $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{A}_i \neq \varnothing$ (non vides)
2. $\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!],\ i \neq j \implies \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ (deux à deux incompatibles)

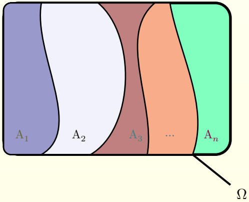


Figure 5 – Système complet d'événements.

Définition 4 :

Soit Ω un univers fini.

On appelle système complet d'événements de Ω toute famille $(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

1. $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ \mathrm{A}_i \neq \varnothing$ (non vides)
2. $\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!],\ i \neq j \implies \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ (deux à deux incompatibles)
3. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i = \Omega$ (recouvrant l'univers)

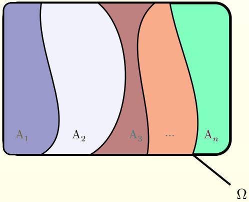


Figure 5 – Système complet d'événements.

On retrouve la notion de partition ensembliste. **Remarques** :

- Parfois la première condition est omise dans la définition. On précise alors système complet d'événements non vides.

On retrouve la notion de partition ensembliste. **Remarques** :

- Parfois la première condition est omise dans la définition. On précise alors système complet d'événements non vides.
- Utiliser un système complet d'événements revient à raisonner par disjonction des cas. On découpe l'univers en plusieurs événements, un et un seul d'entre eux étant réalisé à chaque issue.

Exemples 3 :

1. Si A est un événement (non impossible et non certain), A et $\overline{\text{A}}$ forment toujours un système complet d'événements.

   C'est le cas le plus courant. Par exemple, en tirant une carte, soit la carte est rouge, soit elle n'est pas rouge.

I. Expérience aléatoire

2. Système complet d'événements

Exemples 3 :

1. Si A est un événement (non impossible et non certain), A et $\overline{\text{A}}$ forment toujours un système complet d'événements.

   C'est le cas le plus courant. Par exemple, en tirant une carte, soit la carte est rouge, soit elle n'est pas rouge.

2. Les événements :

   - H:« Tirer un cœur »,
   - D:« Tirer un carreau »,
   - S:« Tirer un pique »,
   - C:« Tirer un trèfle »

   forment également un système complet d'événements.

Exemples 3 :

1. Si A est un événement (non impossible et non certain), A et $\overline{\text{A}}$ forment toujours un système complet d'événements.

   C'est le cas le plus courant. Par exemple, en tirant une carte, soit la carte est rouge, soit elle n'est pas rouge.

2. Les événements :

   - H:« Tirer un cœur »,
   - D:« Tirer un carreau »,
   - S:« Tirer un pique »,
   - C:« Tirer un trèfle »

   forment également un système complet d'événements.

3. La famille $\left(\{\omega\}\right)_{\omega\in\Omega}$ formée des événements élémentaires, est un système complet d'événements de Ω

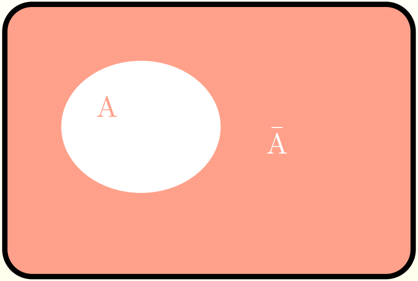


Figure 6 – Partition de l'univers à partir de A et $\overline{A}$.

À retenir :

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
l'ensemble	l'univers
un élément	une issue
un singleton	un événement élémentaire
une partie	un événement
l'ensemble vide	l'événement impossible
le complémentaire	l'événement contraire
$A \cap B$	« A et B »
$A \cup B$	« A ou B »
A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
partition	système complet d'événements

II. Probabilité

Définition 5 :

Soit Ω un univers fini.

- On appelle probabilité sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

Définition 5 :

Soit Ω un univers fini.

- On appelle probabilité sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Définition 5 :

Soit Ω un univers fini.

- On appelle probabilité sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  2. pour tout couple d'événements incompatibles A et B, on a :

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Définition 5 :

Soit Ω un univers fini.

- On appelle probabilité sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  2. pour tout couple d'événements incompatibles A et B, on a :
  $$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$
- On appelle espace probabilisé tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Exemple 4 :

On considère le lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Une probabilité sur Ω est $\mathbb{P}_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \dfrac{1}{6}\,\mathrm{card}\,\mathrm{A} \end{array}$ (dé non pipé)

Exemple 4 :

On considère le lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Une probabilité sur Ω est $\mathbb{P}_1 : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \dfrac{1}{6}\,\mathrm{card}\,\mathrm{A} \end{array}$ (dé non pipé)

- On peut aussi définir

$$\mathbb{P}_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin \mathrm{A} \\ 1 & \text{si } 6 \in \mathrm{A} \end{cases} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{dé pipé pour tomber} \\ \text{sur 6 à tous les coups} \end{array} \right)$$

II. Probabilité

1. Espace probabilisé

Corollaire 0.1 :

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω fini.

1. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$) sont des événements deux à deux incompatibles, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Corollaire 0.2 :

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω fini.

1. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$) sont des événements deux à deux incompatibles, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$
2. En particulier, si A_1, $A_2, \cdots$, A_n (avec $n \in \mathbb{N}^\star$) est un système complet d'événements, alors
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Corollaire 0.3 :

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω fini.

1. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$) sont des événements deux à deux incompatibles, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$
2. En particulier, si A_1, $A_2, \cdots$, A_n (avec $n \in \mathbb{N}^\star$) est un système complet d'événements, alors
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

La propriété 1 est appelée σ-additivité.

Exercice 1 :

Déterminer une probabilité P sur $\Omega = [\![1, n]\!]$ telle que $\mathrm{P}(\{k\})$ soit proportionnelle à k^2.

Proposition I (Propriétés) :

Soit $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (probabilité de l'événement contraire)

Proposition 1 (Propriétés) :

Soit $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (probabilité de l'événement contraire)
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ (probabilité de l'événement impossible)

II. Probabilité

1. Espace probabilisé

Proposition 1 (Propriétés) :

Soit $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A})$ (probabilité de l'événement contraire)
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ (probabilité de l'événement impossible)
3. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A})$.

Proposition I (Propriétés) :

Soit $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (probabilité de l'événement contraire)
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ (probabilité de l'événement impossible)
3. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (croissance de la probabilité)

Proposition 1 (Propriétés) :

Soit $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A})$ (probabilité de l'événement contraire)
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ (probabilité de l'événement impossible)
3. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A})$.
4. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{B})$ (croissance de la probabilité)
5. $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (probabilité de la réunion)

Exercice 2 :

Soient A et B des événements d'un univers Ω tels que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,3\,; \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0,4 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = 0,9.$$

Quelle est la probabilité que se réalise l'un des événements A ou B ?

Corollaire II.1 :

Soient $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(\mathrm{A}_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'événements.

Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{A}_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\mathbb{P}(\mathrm{A}_i).$$

Corollaire 1.2 (Propriété des probabilités totales) :

Soient $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements.

Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B\cap A_i).$$

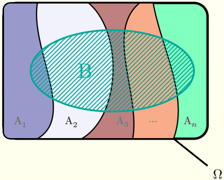


Figure 7 – $B = \bigcup_{i=1}^{n} \left(B\cap A_i\right)$

Corollaire I.3 (Propriété des probabilités totales) :

Soient $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système complet d'événements.

Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_i).$$

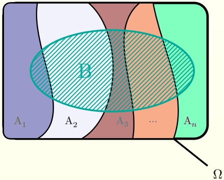


Figure 7 – $\mathrm{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_i\right)$

En particulier, si $\mathrm{B}=\Omega$, on retrouve $1 = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$.

On considère un univers fini Ω de cardinal n.

Par définition, une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$.

On considère un univers fini Ω de cardinal n.

Par définition, une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$.

Définir une propriété reviendrait donc à définir une image pour les 2^n parties de Ω ce qui pourrait être et serait certainement fastidieux. D'autant plus qu'il faudrait aussi vérifier que les conditions de la définition (5) soient vérifiées.

On considère un univers fini Ω de cardinal n.

Par définition, une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$.

Définir une propriété reviendrait donc à définir une image pour les 2^n parties de Ω ce qui pourrait être et serait certainement fastidieux. D'autant plus qu'il faudrait aussi vérifier que les conditions de la définition (5) soient vérifiées.

Il y a une méthode plus simple qui est d'associer à chaque événement élémentaire (il y en a seulement n) une probabilité. Chaque événement étant réunion disjointe d'événements élémentaires, sa probabilité pourra ainsi être calculée.

Théorème 2 :

Soient $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ et p_1, p_2 , ···, p_n des réels.

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Théorème 2 :

Soient $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ et p_1, p_2 , $\cdots$, p_n des réels.

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}\Big(\,\{\omega_i\}\,\Big) = p_i$.

Théorème 2 :

Soient $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ et p_1, p_2 , $\cdots$, p_n des réels.

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}\Big(\,\{\omega_i\}\,\Big) = p_i$.

En particulier,

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(\mathrm{A}) = \sum_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ \omega_i \in \mathrm{A}}} p_i.$$

Théorème 2 :

Soient $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ et p_1, p_2 , $\cdots$, p_n des réels.

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}\Big(\{\omega_i\} \Big) = p_i$.

En particulier,

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(\mathrm{A}) = \sum_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ \omega_i \in \mathrm{A}}} p_i.$$

Remarque : Les deux conditions de la première assertion entraînent aussi que $p_i \leqslant 1$. Ce n'est qu'une condition nécessaire.

Exemple 5 :

Pour le lancer d'un dé, on peut poser :

ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$0,2$	$0,05$	$0,3$	$0,05$	$0,3$	$0,1$

Et alors, si on considère l'événement : E : « Obtenir un nombre pair », on a $\mathrm{E} = \{2,4,6\}$.

D'où $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 0,05 + 0,05 + 0,1 = 0,2$.

II. Probabilité

3. Probabilité uniforme

De manière générale, soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un univers fini. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbb{P}\Big(\,\{\omega_i\}\,\Big) = \frac{1}{\mathrm{card}\,(\Omega)}.$$

II. Probabilité

3. Probabilité uniforme

De manière générale, soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un univers fini. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbb{P}\Big(\{\omega_i\}\Big) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

Définition 6 :

Soit Ω un univers fini.

On appelle **probabilité uniforme**, ou **équiprobabilité** sur Ω l'unique probabilité attribuant la même probabilité à tous les événements élémentaires.

II. Probabilité
3. Probabilité uniforme

De manière générale, soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un univers fini. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbb{P}\Big(\,\{\omega_i\}\,\Big) = \frac{1}{\mathrm{card}\,(\Omega)}.$$

Définition 6 :

Soit Ω un univers fini.

On appelle **probabilité uniforme**, ou **équiprobabilité** sur Ω l'unique probabilité attribuant la même probabilité à tous les événements élémentaires.

Remarque : Si card $(\Omega) = n$ alors la probabilité de chaque événement élémentaire est $p = \dfrac{1}{n}$.

ω	ω_1	ω_2	$\cdots$	ω_n
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	p	p	$\cdots$	p

En effet, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \sum_{\omega \in \Omega} 1 = pn.$

Proposition 3 :

Soit Ω un univers fini, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

Alors, pour tout événement A :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card }(A)}{\text{card }(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Proposition 3 :

Soit Ω un univers fini, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

Alors, pour tout événement A :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{\operatorname{card}\ (\mathrm{A})}{\operatorname{card}\ (\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

ATTENTION

Cette relation ne s'applique que pour la probabilité uniforme.

Si on reprend l' exemple (5) du dé précédent, on avait $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = 0,2$.

Or, $\dfrac{\operatorname{card}\ (\mathrm{E})}{\operatorname{card}\ (\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \neq \mathbb{P}(\mathrm{E})$.

Remarque : L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique lorsqu'aucun événement élémentaire n'est favorisé.

Remarque : L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique lorsqu'aucun événement élémentaire n'est favorisé.

On la repère dans un énoncé lorsqu'il est dit que le dé est *équilibré*, que la pièce est *non truquée*, que les boules tirées sont *indiscernables au toucher*, ...

Mais cette équiprobabilité dépend aussi de l'univers choisi comme le montre l'exemple suivant : on lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés. Laquelle de ces deux modélisations donnent la bonne probabilité du double six ?

1. Première modélisation. Il n'y a pas d'ordre particulier. On note les numéros obtenus dans un ensemble. Si on obtient deux 6 par exemple, on notera alors $\{6\}$.
   L'univers est alors donné dans le tableau suivant :

$\{1\}$					
$\{1,2\}$	$\{2\}$				
$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$			
$\{1,4\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{4\}$		
$\{1,5\}$	$\{2,5\}$	$\{3,5\}$	$\{4,5\}$	$\{5\}$	
$\{1,6\}$	$\{2,6\}$	$\{3,6\}$	$\{4,6\}$	$\{5,6\}$	$\{6\}$

   Si on considère qu'il y a équiprobabilité sur cet univers alors $\mathbb{P}(\text{« double six »}) = \dfrac{1}{21}$.

1. Deuxième modélisation. On peint les dés en rouge et en jaune. On note le résultat du dé rouge en premier dans un couple, et le résultat du jaune en deuxième.
L'univers est alors donné dans le tableau suivant :

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Si on considère qu'il y a équiprobabilité sur cet univers alors
$\mathbb{P}(\text{« double six »}) = \dfrac{1}{36}$.

Exercice 3 :

On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?

Exercice 3 :

On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

III. Probabilité conditionnelle

Le principe des probabilités conditionnelles est, si on y réfléchit bien, assez simple, et surtout utilisé sans forcément qu'on s'en rende compte dans nombre d'exercices.

Comme son nom l'indique, la notion désigne une probabilité soumise à une condition. Prenons un exemple simple : on lance deux dés et on regarde leur somme (vous devez commencer à avoir l'habitude). On se rend aisément compte que la probabilité d'obtenir 5 valait $\dfrac{1}{9}$?

Supposons qu'on ait maintenant l'information supplémentaire : on sait que le premier dé est est tombé sur la face 2. Ça change tout !

Pour obtenir un total de 5, il faut maintenant (et il suffit) que le deuxième dé tombe sur 3, soit une chance sur 6. On dit que la probabilité d'obtenir 5 sachant que le premier dé a donné 2 vaut $\dfrac{1}{6}$.

Exemple 6 :

Dans une classe, en notant :

- G : les élèves mesurant plus de 1,80m
- H les étudiants de sexe masculin.

	G	$\overline{G}$	Total
H	8	12	20
$\overline{H}$	3	11	14
Total	11	23	34

On obtient la répartition ci-contre :

On choisit un élève au hasard pour passer au tableau.

- La probabilité que l'élève soit grand est $\mathbb{P}(G) = \dfrac{\text{card}\,(G)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{11}{34}$.

Exemple 6 :

Dans une classe, en notant :

- G : les élèves mesurant plus de 1,80m
- H les étudiants de sexe masculin.

	G	$\overline{\text{G}}$	Total
H	8	12	20
$\overline{\text{H}}$	3	11	14
Total	11	23	34

On obtient la répartition ci-contre :

On choisit un élève au hasard pour passer au tableau.

- La probabilité que l'élève soit grand est $\mathbb{P}(\text{G}) = \dfrac{\text{card}\,(\text{G})}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{11}{34}$.
- La probabilité que l'élève soit grand parmi les élèves de sexe masculin est

$$\mathbb{P}_{\text{H}}(\text{G}) = \frac{\text{card}\,(\text{G} \cap \text{H})}{\text{card}\,(\text{H})} = \frac{8}{20}.$$

III. Probabilité conditionnelle

Exemple 6 :

Dans une classe, en notant :

- G : les élèves mesurant plus de 1,80m
- H les étudiants de sexe masculin.

	G	$\overline{\mathrm{G}}$	Total
H	8	12	20
$\overline{\mathrm{H}}$	3	11	14
Total	11	23	34

On obtient la répartition ci-contre :

On choisit un élève au hasard pour passer au tableau.

- La probabilité que l'élève soit grand est $\mathbb{P}(\mathrm{G}) = \dfrac{\mathrm{card}\,(\mathrm{G})}{\mathrm{card}\,(\Omega)} = \dfrac{11}{34}$.
- La probabilité que l'élève soit grand parmi les élèves de sexe masculin est

$$\mathbb{P}_{\mathrm{H}}(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{card}\,(\mathrm{G} \cap \mathrm{H})}{\mathrm{card}\,(\mathrm{H})} = \frac{8}{20}.$$

- La probabilité que l'élève soit de sexe masculin parmi les grands est

$$\mathbb{P}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \frac{\mathrm{card}\,(\mathrm{G} \cap \mathrm{H})}{\mathrm{card}\,(\mathrm{G})} = \frac{8}{11}.$$

III. Probabilité conditionnelle

Exemple 6 :

Dans une classe, en notant :

- G : les élèves mesurant plus de 1,80m
- H les étudiants de sexe masculin.

On obtient la répartition ci-contre :

	G	$\overline{G}$	Total
H	8	12	20
$\overline{H}$	3	11	14
Total	11	23	34

On choisit un élève au hasard pour passer au tableau.

- La probabilité que l'élève soit grand est $\mathbb{P}(G) = \dfrac{\text{card}\,(G)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{11}{34}$.
- La probabilité que l'élève soit grand parmi les élèves de sexe masculin est
$$\mathbb{P}_H(G) = \frac{\text{card}\,(G \cap H)}{\text{card}\,(H)} = \frac{8}{20}.$$
- La probabilité que l'élève soit de sexe masculin parmi les grands est
$$\mathbb{P}_G(H) = \frac{\text{card}\,(G \cap H)}{\text{card}\,(G)} = \frac{8}{11}.$$

On remarquera que $\mathbb{P}(G) \neq \mathbb{P}_H(G)$ et on dira plus tard que les événements G et H ne sont pas indépendants.

III. Probabilité conditionnelle

Définition 7 :

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et A un événement tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ ou $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ le quotient :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})}.$$

III. Probabilité conditionnelle

Définition 7 :

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $P(B|A)$ ou $P_A(B)$ le quotient :

$$P_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Proposition 4 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité conditionnelle sachant A.

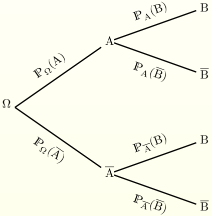
III. Probabilité conditionnelle

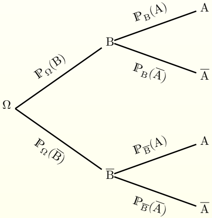
Remarques :

1. Toute probabilité peut être vue comme une probabilité conditionnelle : $P(A) = P_{\Omega}(A)$.

Remarques :

1. Toute probabilité peut être vue comme une probabilité conditionnelle : $P(A) = P_{\Omega}(A)$.
2. Les probabilités conditionnelles sont les probabilités écrites sur les branches :

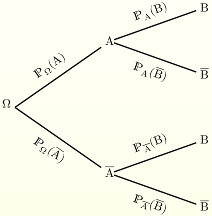


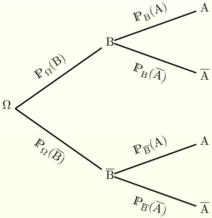


III. Probabilité conditionnelle

Remarques :

1. Toute probabilité peut être vue comme une probabilité conditionnelle : $P(A) = P_\Omega(A)$.
2. Les probabilités conditionnelles sont les probabilités écrites sur les branches :





3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent :

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$
$$\text{et } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).$$

$$A = (B \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)$$
$$\text{et } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap A)$$

III. Probabilité conditionnelle

Exercice 4 :

On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?

III. Probabilité conditionnelle

Exercice 4 :

On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

III. Probabilité conditionnelle

1. Probabilités composées

En général, c'est la probabilité conditionnelle qui est donnée par l'expérience. On calcule alors $\mathbb{P}(A \cap B)$ par la formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$, et non l'inverse !

III. Probabilité conditionnelle

1. Probabilités composées

En général, c'est la probabilité conditionnelle qui est donnée par l'expérience. On calcule alors $\mathbb{P}(A \cap B)$ par la formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$, et non l'inverse !

Théorème 5 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ une famille finie d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) \ \text{ si } \ \mathbb{P}(B) \neq 0. \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \ \text{ si } \ \mathbb{P}(A) \neq 0. \end{aligned}$$

III. Probabilité conditionnelle

1. Probabilités composées

En général, c'est la probabilité conditionnelle qui est donnée par l'expérience. On calcule alors $\mathbb{P}(A \cap B)$ par la formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$, et non l'inverse !

Théorème 5 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ une famille finie d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0. \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(A) \neq 0. \end{aligned}$$

Remarque : Cette formule correspond simplement à la multiplication des probabilités sur les branches d'un arbre lors de son parcours.

Exercice 5 :

Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

III. Probabilité conditionnelle

2. Probabilités totales

Théorème 6 (Propriété des probabilités totales bis) :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$un système complet d'événements (tous non impossibles).

Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).$$

Théorème 6 (Propriété des probabilités totales bis) :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$un système complet d'événements (tous non impossibles).

Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).$$

Remarque : Cette formule correspond simplement à la disjonction des cas.

Exercice 6 :

X et Y s'entraîne au tir à l'arc.

X atteint la cible 9 fois sur 10, Y atteint la cible 6 fois sur 10. Y joue deux fois sur trois.

Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

III. Probabilité conditionnelle

3. Formule de Bayes

Théorème 7 :

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}\, \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}).$$

Théorème 7 :

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{P}_A(B).$$

Remarque : Si on considère l'événement A antérieur à l'événement B, on peut voir A comme la cause et B comme la conséquence. La formule de Bayes permet de renverser ces notions : connaissant la conséquence, quelle est la probabilité que telle cause ait eu lieu ?

III. Probabilité conditionnelle

3. Formule de Bayes

Exercice 7 :

Reprenons l' **exercice** (6) . L'un des joueurs a atteint la cible.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y ?

Souvent, on a besoin d'utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{B})$. On peut même généraliser à un système complet d'événements :

Corollaire 7.1 (Formule de Bayes) :

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On considère un système complet d'événements $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n)$ de probabilités non nulles.

Si B est un événement de probabilité non nulle, alors :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}_j) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A}_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B})}\,\mathbb{P}_{\mathrm{A}_j}(\mathrm{B}).$$

IV. Indépendance

IV. Indépendance

1. Avec deux événements

Définition 8 :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

IV. Indépendance

1. Avec deux événements

Définition 8 :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}).$$

Supposons que A soit tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{A et B sont indépendants} \quad &\iff \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) \iff \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})} = \mathbb{P}(\mathrm{B}). \\ &\iff \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) \end{aligned}$$

IV. Indépendance

1. Avec deux événements

Proposition 8 :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Deux événements de probabilité non nulle A et B sont indépendants si, et seulement si $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B})$.

Proposition 8 :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Deux événements de probabilité non nulle A et B sont indépendants si, et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Remarque : Dans le cas où l'un des deux événements a une probabilité nulle, les événements sont de toute façon nécessairement indépendants (même si c'est absurde !).

Cette dernière expression est plus parlante : la probabilité de B est inchangée qu'on sache ou non que A est réalisé.

C'est plus proche de la notion intuitive d'indépendance, mais a plusieurs inconvénients : l'asymétrie, et l'hypothèse que A est de probabilité non nulle.

IV. Indépendance

1. Avec deux événements

Proposition 9 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

- A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Proposition 9 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

- A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
- A et B sont indépendants si, et seulement si

Proposition 9 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

- A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
- A et B sont indépendants si, et seulement si

  1. $\bar{A}$ et B,

  le sont aussi.

IV. Indépendance

1. Avec deux événements

Proposition 9 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

- A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
- A et B sont indépendants si, et seulement si

  1. $\bar{A}$ et B,
  2. A et $\bar{B}$,

  le sont aussi.

IV. Indépendance

1. Avec deux événements

Proposition 9 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

- A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
- A et B sont indépendants si, et seulement si

  1. $\bar{A}$ et B,
  2. A et $\bar{B}$,
  3. ou $\bar{A}$ et $\bar{B}$

  le sont aussi.

IV. Indépendance
1. Avec deux événements

Proposition 9 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

- A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
- A et B sont indépendants si, et seulement si

  1. $\bar{A}$ et B,
  2. A et $\bar{B}$,
  3. ou $\bar{A}$ et $\bar{B}$

  le sont aussi.

Méthode 1 :

Pour montrer que deux événements sont indépendants ou pas

- *on calcule séparément* $P(A \cap B)$ *et* $P(A)P(B)$.

IV. Indépendance

1. Avec deux événements

Proposition 9 :

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

- A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
- A et B sont indépendants si, et seulement si

  1. $\bar{A}$ et B,
  2. A et $\bar{B}$,
  3. ou $\bar{A}$ et $\bar{B}$

  le sont aussi.

Méthode 1 :

Pour montrer que deux événements sont indépendants ou pas

- on calcule séparément $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$.
- Suivant l'égalité ou non, on conclue à l'indépendance ou non.

Exercice 8 :

Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir.

Un client se présente et choisit un meuble.

On considère les évènements :

- F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

IV. Indépendance

2. Avec une famille d'événements

Lorsqu'on considère plus de deux événements, il y a deux manières de généraliser l'indépendance :

Définition 9 :

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On considère une famille finie d'événements $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$).

- Les événements $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ sont dits deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)\mathbb{P}(\mathrm{A}_j).$$

IV. Indépendance
2. Avec une famille d'événements

Lorsqu'on considère plus de deux événements, il y a deux manières de généraliser l'indépendance :

Définition 9 :

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On considère une famille finie d'événements $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$).

- Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

- Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall\, I \in \mathcal{P}\left([\![1\,;n]\!]\right), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

ATTENTION

Il est clair que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque n'est pas vraie !

Des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants. La condition est beaucoup plus forte que ça.

ATTENTION

Il est clair que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque n'est pas vraie !

Des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants. La condition est beaucoup plus forte que ça.

Par exemple, pour trois événements, on doit avoir
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$,
$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3)$
mais aussi
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$.

Les conditions à vérifier deviennent rapidement affreuses quand on augmente le nombre d'évènements.

Contre-Exemple 7 :

On considère une pièce qu'on lance deux fois et on considère les événements suivants :

A : « On obtient pile au premier lancer »

B : « On obtient face au deuxième lancer »

C : « On obtient deux lancers différents »

1^{er} / $2^{\text{ème}}$	P	F
P	(P,P)	(P,F)
F	(F,P)	(F,F)

On a $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{2}$.

On voit facilement que $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{1}{4}$.

Donc les événements sont deux à deux indépendants.

IV. Indépendance

2. Avec une famille d'événements

Contre-Exemple 7 :

On considère une pièce qu'on lance deux fois et on considère les événements suivants :

A : « On obtient pile au premier lancer »

B : « On obtient face au deuxième lancer »

C : « On obtient deux lancers différents »

1^{er} / $2^{\text{ème}}$	P	F
P	(P, P)	(P, F)
F	(F, P)	(F, F)

On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2}$.

On voit facilement que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{4}$.

Donc les événements sont deux à deux indépendants.

Pourtant, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{8}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Les événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Proposition 10 :

Soient A_1, ...,A_n des événements mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.

Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.

Alors B_1, ..., B_n sont mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.

Corollaire 10.1 :

Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

Alors :

1. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants.

Corollaire 10.2 :

Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

Alors :

1. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants.
2. $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.

Corollaire 10.3 :

Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

Alors :

1. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants.
2. $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.
3. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.

Corollaire 10.4 :

Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

Alors :

1. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants.
2. $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.
3. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.
4. $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants.

IV. Indépendance

2. Avec une famille d'événements

Exercice 9 :

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$:

1. si A et B sont indépendants ;

IV. Indépendance

2. Avec une famille d'événements

Exercice 9 :

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$:

1. si A et B sont indépendants ;
2. si A et B sont incompatibles.

Exercice 9 :

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$:

1. si A et B sont indépendants ;
2. si A et B sont incompatibles.

Exercice 9 :

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$:

1. si A et B sont indépendants ;
2. si A et B sont incompatibles.

Un ingénieur pense que ses équations sont une approximation de la réalité.

Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.

Un mathématicien s'en moque.