

# XXIV

## Probabilités

Un médecin annonce à un de ses patients :

- J'ai une bonne et une mauvaise nouvelle, je commence par la mauvaise.

Vous avez une maladie grave dont on ne guérit qu'avec une probabilité de 1 sur 10.

- Et la bonne nouvelle docteur ?

- Mes neuf derniers patients sont morts...



Le concept de probabilité est a priori relativement intuitif : rien de surprenant à ce qu'un dé à six faces normalement constitué tombe en moyenne une fois sur six sur chacune de ses faces (il s'agit toutefois d'un résultat statistique, qui ne garantit par exemple en aucun cas qu'au bout de six lancers on aura obtenu chacun des six résultats possibles).



Les probabilités étudiées au lycée restent la plupart du temps dans ce cadre : nombre fini de possibilités, probabilité égale pour chacun des cas possibles, mais en fait, l'étude des probabilités en mathématiques peut se faire dans un cadre beaucoup plus large.

### Contenu

I. Expérience aléatoire.....	<b>1</b>
I.1 L'Univers . . . . .	1
I.2 Système complet d'événements . . . . .	4
II. Probabilité.....	<b>5</b>
II.1 Espace probabilisé . . . . .	5
II.2 Fondations . . . . .	8
II.3 Probabilité uniforme . . . . .	10
III. Probabilité conditionnelle.....	<b>12</b>
III.1 Probabilités composées . . . . .	15
III.2 Probabilités totales . . . . .	16
III.3 Formule de Bayes . . . . .	16
IV. Indépendance.....	<b>17</b>
IV.1 Avec deux événements . . . . .	17
IV.2 Avec une famille d'événements . . . . .	19



## EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

### I.1 L'Univers

**Définition I :** On appelle :

- *expérience aléatoire*, toute expérience dont on ne peut prédire l'issue avec certitude.
- *univers* l'ensemble, souvent noté  $\Omega$ , de toutes les issues possibles.

- *événement, éventualité* ou encore *issue* toute partie  $\omega$  de l'univers  $\Omega$ .
- *événement élémentaire* tout événement constitué d'une seule issue ou d'un seul élément.

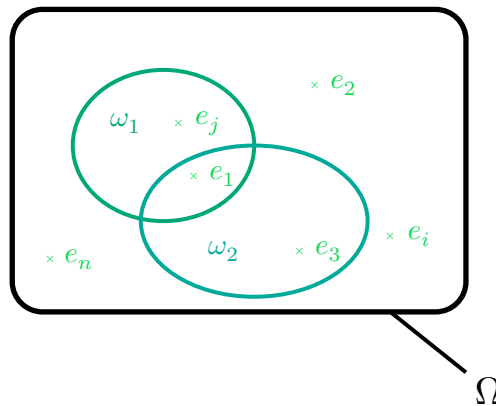


Figure XXIV.1 – Univers et événements

Les probabilités au programme de PTSI sont les probabilités dites finies, c'est à dire qu'on suppose pour cette année que l'univers est un ensemble fini. Pour information, il y a également des probabilités dites discrètes ( $\omega$  est fini ou dénombrable - par exemple  $\Omega = \mathbb{N}$  - au programme de deuxième année) et des probabilités continues ( $\Omega$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  - hors programme en classes préparatoires scientifiques)

**Remarques :**

- L'expérience est aléatoire : on ne sait pas à l'avance quelle en sera l'issue. Mais on suppose qu'on connaît l'ensemble des issues possibles.
- Il peut exister plusieurs modélisations associées à une même expérience aléatoire, et à chacune, on associera un univers différent. Pour le lancer du dé, on pourrait s'intéresser à la position du dé sur la table, ou la température de la pièce après le lancer... L'univers serait alors non plus  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  mais  $[0, 3] \times [0, 2]$  ou  $\mathbb{R}_+$ . Il faut donc toujours commencer par préciser l'univers avec lequel on travaille.
- Toute partie d'un univers fini est appelée un événement. L'ensemble des événements est donc  $\mathcal{P}(\Omega)$  (dont on connaît le cardinal)

**Exemples I :**

- 1 On lance un dé. Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il y six événements élémentaires :  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$  à ne pas confondre avec les issues.

$A = \{2, 4, 6\}$  est un événement. Il peut être décrit par une phrase :  $A$  : « Obtenir un nombre pair »

- 2 On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Les résultats possibles sont :  $7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \dots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit$ .

$$\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \dots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$$

L'événement  $K$  : « Tirer un roi » : est  $K = \{R\heartsuit, R\diamondsuit, R\spadesuit, R\clubsuit\}$ .

- 3 Le temps d'attente avant la désintégration d'un noyau radioactif est un réel positif.

$$\Omega = \mathbb{R}_+$$

**Remarque :** lorsque l'univers est infini toutes les parties de  $\Omega$  ne sont pas des événements.

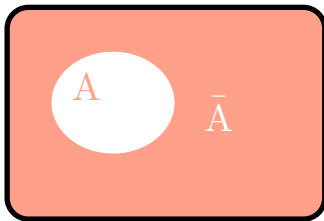
**Définition 2 :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

On appelle :

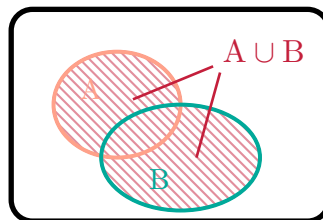
- événement *impossible* l'ensemble vide :  $\emptyset$
- événement *certain* l'univers entier :  $\Omega$

**Définition 3 :** Soient A et B deux événements d'un univers fini  $\Omega$ .

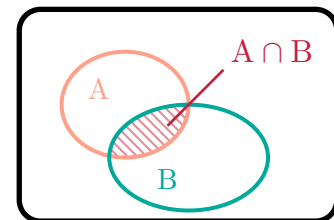
- Le *complémentaire* de A dans  $\Omega$ , noté  $\bar{A}$ , est appelé événement *contraire* à A.
- La *réunion*  $A \cup B$  de A et B est un événement appelé « A ou B ».
- L'*intersection*  $A \cap B$  de A et B est un événement appelé « A et B ».
- Lorsque « A et B » est l'événement impossible (*i.e.*  $A \cap B = \emptyset$ ) les événements A et B sont dits *incompatibles*.



**Figure XXIV.2** – Événement contraire



**Figure XXIV.3** – Événement réunion



**Figure XXIV.4** – Événement intersection

**Exemple 2 :** Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers  $\{P, F\}^2$ .

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.*  $A = \{(P; P), (P; F)\}$
- B l'événement « la deuxième pièce montre pile » *i.e.*  $B = \{(P; P), (F; P)\}$ .

**1** L'événement  $A \cup B$  est « une des deux pièces montre pile » *i.e.*

$$A \cup B = \{(F; P), (P; P), (P; F)\}.$$

**2** L'événement  $A \cap B$  est « les deux pièces montrent pile » *i.e.*

$$A \cap B = \{(P; P)\}.$$

**3** L'événement contraire de A « la première pièce montre face » *i.e.*

$$\bar{A} = \{(F; P), (F; F)\}.$$

## I.2 Système complet d'événements

**Définition 4 :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

On appelle *système complet d'événements* de  $\Omega$  toute famille  $(A_1, \dots, A_n)$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ) d'événements telle que :

- 1  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_i \neq \emptyset$  (non vides)
- 2  $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$  (deux à deux incompatibles)
- 3  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  (recouvrant l'univers)

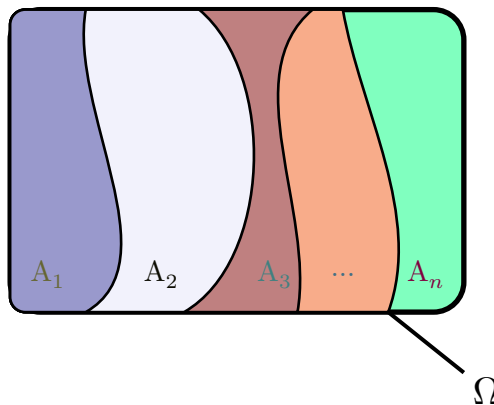


Figure XXIV.5 – Système complet d'événements.

On retrouve la notion de partition ensembliste.

**Remarques :**

- Parfois la première condition est omise dans la définition. On précise alors système complet d'événements *non vides*.
- Utiliser un système complet d'événements revient à raisonner par disjonction des cas. On découpe l'univers en plusieurs événements, un et un seul d'entre eux étant réalisé à chaque issue.

**Exemples 3 :**

- 1 Si  $A$  est un événement (non impossible et non certain),  $A$  et  $\bar{A}$  forment toujours un système complet d'événements.

C'est le cas le plus courant. Par exemple, en tirant une carte, soit la carte est rouge, soit elle n'est pas rouge.

- 2 Les événements :

- H: « Tirer un cœur »,
- S: « Tirer un pique »,
- D: « Tirer un carreau »,
- C: « Tirer un trèfle »

forment également un système complet d'événements.

- 3 La famille  $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  formée des événements élémentaires, est un système complet d'événements de  $\Omega$

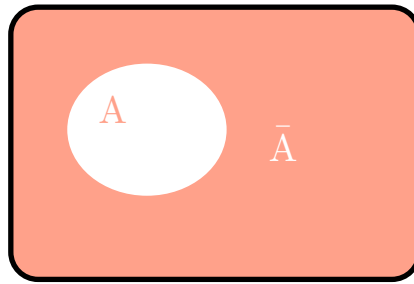


Figure XXIV.6 – Partition de l’univers à partir de A et  $\bar{A}$ .

	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
À retenir I :	l’ensemble	l’univers
	un élément	une issue
	un singleton	un événement élémentaire
	une partie	un événement
	l’ensemble vide	l’événement impossible
	le complémentaire	l’événement contraire
	$A \cap B$	« A et B »
	$A \cup B$	« A ou B »
	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
	partition	système complet d’événements

## II PROBABILITÉ

### II.1 Espace probabilisé

**Définition 5 :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

- On appelle *probabilité* sur  $\Omega$  toute application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :

1  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

- 2 pour tout couple d’événements incompatibles A et B, on a :

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

- On appelle *espace probabilisé* tout couple  $(\Omega, \mathbb{P})$  où  $\Omega$  est un univers et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega$ .

**Exemple 4 :** On considère le lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- Une probabilité sur  $\Omega$  est  $\mathbb{P}_1 : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$  (dé non pipé)

$$A \mapsto \frac{1}{6} \text{card } A$$

- On peut aussi définir  $\mathbb{P}_2 : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$  (dé pipé pour tomber sur 6 à tous les coups)

$$A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases}$$

**Corollaire OI :** Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega$  fini.

- 1** Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont des événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P} \left( \bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- 2** En particulier, si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$$

La propriété **1** est appelée  $\sigma$ -additivité.

**Exercice I :** Déterminer une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$  telle que  $\mathbb{P}(\{k\})$  soit proportionnelle à  $k^2$ .

**Proposition I (Propriétés) :** Soit  $(\Omega; \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

- 1**  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$  (probabilité de l'événement contraire)
- 2**  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  (probabilité de l'événement impossible)
- 3** Si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ .
- 4** Si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  (croissance de la probabilité)
- 5**  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$  (probabilité de la réunion)

**Preuve :**

- 1** Les événements  $A$  et  $\bar{A}$  sont incompatibles. On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(A).$$

Or,  $A \cup \bar{A} = \Omega$  donc  $\mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = 1$ .

D'où,  $1 = \mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(A)$ , et  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .

- 2**  $\emptyset = \bar{\Omega}$  donc  $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$ .

- 3** Soit  $A \subset B$ . Les événements  $A$  et  $B \setminus A$  sont incompatibles. On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

Or  $A \cup (B \setminus A) = B$  donc  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$ . D'où  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ .

4 Soit  $A \subset B$ . On a  $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$  donc  $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$  et  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

5 On écrit  $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$ .

Les événements  $A$  et  $B \setminus (A \cap B)$  sont incompatibles donc

$\mathbb{P}(A \cup [B \setminus (A \cap B)]) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))$  et finalement

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

**Exercice 2** : Soient  $A$  et  $B$  des événements d'un univers  $\Omega$  tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 0,3; \quad \mathbb{P}(B) = 0,4 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,9.$$

Quelle est la probabilité que se réalise l'un des événements  $A$  ou  $B$  ?

**Corollaire 1.1** : Soient  $(\Omega; \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$  une famille d'événements.

Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(A_i).$$

**Preuve** : Ce résultat étant évident pour  $p = 1$ , montrons la propriété par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Supposons alors que la propriété soit vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$  et considérons  $A_1, \dots, A_{p+1}$  des événements. On pose  $B = \bigcup_{i=1}^p A_i$ .

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \cup A_{p+1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) + \mathbb{P}(A_{p+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \cap A_{p+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbb{P}(A_i). \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée au premier rang, elle est vraie pour tout entier non nul  $p$ .

**Corollaire 1.2 (Propriété des probabilités totales)** : Soient  $(\Omega; \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements.

Pour tout événement  $B$ , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

En particulier, si  $B = \Omega$ , on retrouve  $1 = \sum_{i \in I} P(A_i)$ .

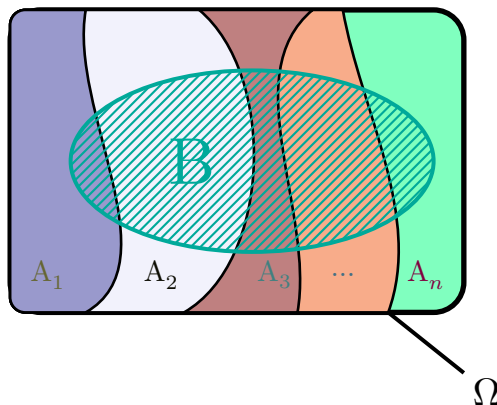


Figure XXIV.7 -  $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$

Preuve : Puisque  $(A_i)_{i \in I}$  est un système complet d'événements,  $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$  et on peut écrire :

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)\right).$$

Or, par définition d'un système complet, les  $A_i$  sont deux à deux incompatibles.

Les  $B \cap A_i$  le sont donc aussi car  $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \emptyset$ , et on a bien finalement :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i).$$

## II.2 Fondations

On considère un univers fini  $\Omega$  de cardinal  $n$ .

Par définition, une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  est une application de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0, 1]$ .

Définir une propriété reviendrait donc à définir une image pour les  $2^n$  parties de  $\Omega$  ce qui pourrait être et serait certainement fastidieux. D'autant plus qu'il faudrait aussi vérifier que les conditions de la **définition (5)** soient vérifiées.

Il y a une méthode plus simple qui est d'associer à chaque événement élémentaire (il y en a seulement  $n$ ) une probabilité. Chaque événement étant réunion disjointe d'événements élémentaires, sa probabilité pourra ainsi être calculée.

**Théorème 2 :** Soient  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  et  $p_1, p_2, \dots, p_n$  des réels.

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

**1**  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

**2** Il existe une unique probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(\{\omega_i\}) = p_i$ .

En particulier,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ \omega_i \in A}} p_i.$$



**Remarque** : Les deux conditions de la première assertion entraînent aussi que  $p_i \leq 1$ . Ce n'est qu'une condition nécessaire.

**Preuve** :

**2**  $\Rightarrow$  **1** Supposons l'existence d'une telle probabilité  $\mathbb{P}$ .

Comme  $\mathbb{P}$  est à valeurs dans  $[0; 1]$ , tous les  $p_i$  sont clairement positifs.

De plus  $(\{\omega_i\})_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  est un système complet d'événements donc

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1.$$

**1**  $\Rightarrow$  **2** On raisonne par analyse-synthèse :

**Analyse** Supposons qu'il existe une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ .

Considérons un événement  $A$  de  $\Omega$ . On peut écrire  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}\}$ .

Comme  $A$  est la réunion disjointe des événements élémentaires  $\{\omega_{i_k}\}$  pour  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^r p_{i_k}.$$

$\mathbb{P}$  est donc entièrement déterminée par la donnée des  $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ . Il reste à montrer que l'application  $\mathbb{P}$  ainsi définie est bien une probabilité. C'est l'objectif de la synthèse.

**Synthèse** Montrons que l'application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  ainsi définie par  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$  est bien une probabilité.

- L'univers étant réunion disjointe des événements élémentaires, on a :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

- Considérons deux événements  $A$  et  $B$  incompatibles.

On peut noter  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}\}$  et  $B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_s}\}$ .

Comme  $A$  et  $B$  sont incompatibles,  $A \cup B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_r}, \omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \omega_{j_s}\}$  et

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) + \sum_{k=1}^s \mathbb{P}(\{\omega_{j_k}\}) = \sum_{k=1}^r p_{i_k} + \sum_{k=1}^s p_{j_k} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

-  $\mathbb{P}$  est bien à valeurs dans  $[0, 1]$ .

En effet, soit  $A \subset \Omega$ . On peut poser  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}\}$  et  $\bar{A} = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_s}\}$

Alors  $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^r p_{i_k} \geq 0$  (somme de nombres positifs).

De même,  $\mathbb{P}(\bar{A}) \geq 0$ .

Or,  $\sum_{k=1}^r \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) + \sum_{k=1}^s \mathbb{P}(\{\omega_{j_k}\}) = 1$ .

Donc,  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$  et donc  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \leq 1$ .

$\mathbb{P}$  est donc bien à valeurs dans  $[0, 1]$  et vérifie les deux axiomes des probabilités : c'est une probabilité.

**Exemple 5 :** Pour le lancer d'un dé, on peut poser :

$\omega$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	0,2	0,05	0,3	0,05	0,3	0,1

Et alors, si on considère l'événement :  $E$  : « Obtenir un nombre pair », on a  $E = \{2, 4, 6\}$ .

D'où  $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 0,05 + 0,05 + 0,1 = 0,2$ .

### II.3 Probabilité uniforme

De manière générale, soit  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  un univers fini. Il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}.$$

**Définition 6 :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

On appelle *probabilité uniforme*, ou *équiprobabilité* sur  $\Omega$  l'unique probabilité attribuant la même probabilité à tous les événements élémentaires.

**Remarque :** Si  $\text{card}(\Omega) = n$  alors la probabilité de chaque événement élémentaire est  $p = \frac{1}{n}$ .

$\omega$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\dots$	$\omega_n$
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$p$	$p$	$\dots$	$p$

En effet,  $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \sum_{\omega \in \Omega} 1 = pn$ .

**Proposition 3 :** Soit  $\Omega$  un univers fini, et  $\mathbb{P}$  la probabilité uniforme sur  $\Omega$ .

Alors, pour tout événement  $A$  :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

**Preuve :** Soit  $A$  un événement. On note  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}\}$ .

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^r p = pr = \frac{r}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

**ATTENTION**

Cette relation ne s'applique que pour la probabilité uniforme.

Si on reprend l'exemple (5) du dé précédent, on avait  $P(E) = 0,2$ .

$$\text{Or, } \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq P(E).$$

**Remarque** : L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique lorsqu'aucun événement élémentaire n'est favorisé.

On la repère dans un énoncé lorsqu'il est dit que le dé est *équilibré*, que la pièce est *non truquée*, que les boules tirées sont *indiscernables au toucher*, ...

Mais cette équiprobabilité dépend aussi de l'univers choisi comme le montre l'exemple suivant : on lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés. Laquelle de ces deux modélisations donnent la bonne probabilité du double six ?

- 1** *Première modélisation.* Il n'y a pas d'ordre particulier. On note les numéros obtenus dans un ensemble. Si on obtient deux 6 par exemple, on notera alors  $\{6\}$ .

L'univers est alors donné dans le tableau suivant :

{1}					
{1, 2}	{2}				
{1, 3}	{2, 3}	{3}			
{1, 4}	{2, 4}	{3, 4}	{4}		
{1, 5}	{2, 5}	{3, 5}	{4, 5}	{5}	
{1, 6}	{2, 6}	{3, 6}	{4, 6}	{5, 6}	{6}

Si on considère qu'il y a équiprobabilité sur cet univers alors  $P(\text{« double six »}) = \frac{1}{21}$ .

- 2** *Deuxième modélisation.* On peint les dés en rouge et en jaune. On note le résultat du dé rouge en premier dans un couple, et le résultat du jaune en deuxième.

L'univers est alors donné dans le tableau suivant :

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Si on considère qu'il y a équiprobabilité sur cet univers alors  $P(\text{« double six »}) = \frac{1}{36}$ .

**Exercice 3** : On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

- 1** Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?  
**2** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

**Correction** : On suppose qu'il y a équiprobabilité sur cet univers. On dispose donc de la formule :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

avec  $\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5}$ .

1 On note A l'événement « obtenir un carré ».

On dénombre les carrés :

- 8 manières de choisir un carré (de 7, de 8, ..., d'Its);
- pour chacun de ces choix, 28 manières de compléter la main.

Donc  $\text{card}(A) = 8 \times 28$  et  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8 \times 28}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{899}$ .

2 On note B l'événement « obtenir au moins deux rois ».

On a  $\bar{B}$  : « obtenir moins d'un roi ».

On fait une disjonction des cas :

- $R_0$  : « n'obtenir aucun roi ».  $\text{card}(R_0) = \binom{28}{5}$
- $R_1$  : « obtenir exactement un roi ».  $\text{card}(R_1) = \binom{4}{1} \binom{28}{4}$

On a  $\bar{B} = R_0 \sqcup R_1$  donc  $\text{card}(\bar{B}) = \text{card}(R_0) + \text{card}(R_1)$

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{\text{card}(\bar{B})}{\text{card}(\Omega)} \\ &= 1 - \frac{\binom{28}{5} + \binom{4}{1} \binom{28}{4}}{\binom{32}{5}} \\ &= \frac{757}{7192}. \end{aligned}$$

### III PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Le principe des probabilités conditionnelles est, si on y réfléchit bien, assez simple, et surtout utilisé sans forcément qu'on s'en rende compte dans nombre d'exercices.

Comme son nom l'indique, la notion désigne une probabilité soumise à une condition. Prenons un exemple simple : on lance deux dés et on regarde leur somme (vous devez commencer à avoir l'habitude). On se rend aisément compte que la probabilité d'obtenir 5 valait  $\frac{1}{9}$  ?

Supposons qu'on ait maintenant l'information supplémentaire : on sait que le premier dé est tombé sur la face 2. Ça change tout !

Pour obtenir un total de 5, il faut maintenant (et il suffit) que le deuxième dé tombe sur 3, soit une chance sur 6. On dit que la probabilité d'obtenir 5 sachant que le premier dé a donné 2 vaut  $\frac{1}{6}$ .

**Exemple 6 :** Dans une classe, en notant :

- G : les élèves mesurant plus de 1,80m
- H les étudiants de sexe masculin.

	G	$\bar{G}$	Total
H	8	12	20
$\bar{H}$	3	11	14
Total	11	23	34

On obtient la répartition ci-contre :

On choisit un élève au hasard pour passer au tableau.

- La probabilité que l'élève soit grand est  $P(G) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{11}{34}$ .
- La probabilité que l'élève soit grand parmi les élèves de sexe masculin est

$$P_H(G) = \frac{\text{card}(G \cap H)}{\text{card}(H)} = \frac{8}{20}.$$

- La probabilité que l'élève soit de sexe masculin parmi les grands est

$$P_G(H) = \frac{\text{card}(G \cap H)}{\text{card}(G)} = \frac{8}{11}.$$

On remarquera que  $P(G) \neq P_H(G)$  et on dira plus tard que les événements  $G$  et  $H$  ne sont pas indépendants.

**Définition 7 :** On considère un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$  et  $A$  un événement tel que  $P(A) \neq 0$ .

On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A*, notée  $P(B|A)$  ou  $P_A(B)$  le quotient :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

**Proposition 4 :** Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $A$  un événement tel que  $P(A) \neq 0$ .

L'application  $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  est une probabilité sur  $\Omega$  appelée *probabilité*

$$B \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

*conditionnelle sachant A*.

**Preuve :** Notons que comme  $P(A) \neq 0$ , le quotient  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  existe.

Montrons que  $P_A$  ainsi définie est bien une probabilité.

- Le quotient  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  est positif puisque  $P(A \cap B) \geq 0$  et  $P(A) > 0$ .

Par ailleurs,  $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B \subset A$ .

Par croissance de la probabilité,  $P(A \cap B) \leq P(A)$ .

D'où,  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$  (car  $P(A) > 0$ ).

Finalement, on a bien  $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), P_A(B) \in [0, 1]$ .

- $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ .

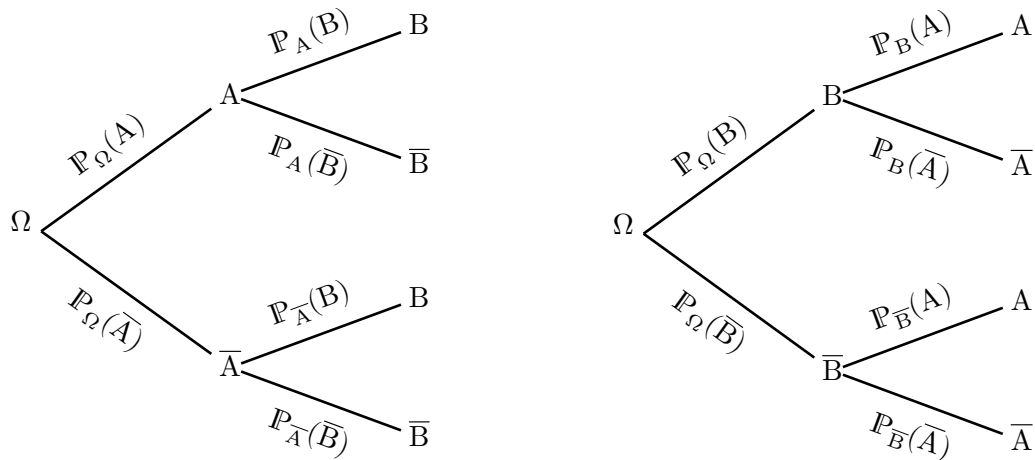
– Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux événements incompatibles. Alors  $A \cap B_1$  et  $A \cap B_2$  sont incompatibles et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (B_1 \cup B_2))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2))}{\mathbb{P}(A)} \text{ par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2)}{\mathbb{P}(A)} \text{ par } \sigma\text{-additivité} \\ &= \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) \end{aligned}$$



Remarques :

- 1] Toute probabilité peut être vue comme une probabilité conditionnelle :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_\Omega(A)$ .
- 2] Les probabilités conditionnelles sont les probabilités écrites sur les branches :



- 3] La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent :

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B).$$

$$A = (B \cap A) \cup (\bar{B} \cap A)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\bar{B} \cap A).$$

Exercice 4 : On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

- 1] Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?
- 2] Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

Correction : Chaque composition de la famille peut être représenté par un couple  $(x; y)$  avec  $x, y \in \{F, G\}$ ,  $x$  représentant l'aîné et  $y$  le second enfant.

On a donc  $\Omega = \{F, G\}^2$  que l'on munit de la probabilité uniforme.

On considère les événements  $A$  : « l'aîné est une fille »,  $B$  : « les deux enfants sont des filles » et  $C$  : « il y a au moins une fille ».

On remarque que ces événements ont une probabilité non nulle.

- 1] La première probabilité demandée est :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

2 La seconde probabilité demandée est :

$$P_C(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{P(B)}{1 - P(\bar{C})} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

car  $\bar{C}$  est l'événement « les deux enfants sont des garçons ».

### III.1 Probabilités composées

En général, c'est la probabilité conditionnelle qui est donnée par l'expérience.

On calcule alors  $P(A \cap B)$  par la formule  $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$ , et non l'inverse !

**Théorème 5 :** Soient  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  une famille finie d'événements tels que  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ .

Alors, on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)P_B(A) \text{ si } P(B) \neq 0. \\ &= P(A)P_A(B) \text{ si } P(A) \neq 0. \end{aligned}$$

**Preuve :** On commence par remarquer que toutes les probabilités conditionnelles sont correctement définies puisque  $P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) \geq \dots \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ .

Ensuite, il suffit d'utiliser la définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} &P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= \cancel{P(A_1)} \times \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \times \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \times \dots \times \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}} \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

**Remarque :** Cette formule correspond simplement à la multiplication des probabilités sur les branches d'un arbre lors de son parcours.

**Exercice 5 :** Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

**Correction :** On note  $N_i$  pour  $i = 1, 2$ , l'événement « on tire une boule noire au  $i^{\text{ème}}$  tirage ».

On obtient :

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

car avant le second tirage, l'urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.

### III.2 Probabilités totales

**Théorème 6 (Propriété des probabilités totales bis) :** Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  un système complet d'événements (tous non impossibles).

Pour tout événement  $B$ , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i).$$

**Preuve :** Soient  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  étant un système complet d'événements et  $B$  un événement quelconque.

D'après le **corollaire (1.2)**, on sait déjà que,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Si  $\forall i \neq 0, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$  on peut définir les probabilités conditionnelles.  $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i)$  et remplacer dans l'expression précédente.

**Remarque :** Cette formule correspond simplement à la disjonction des cas.

**Exercice 6 :**  $X$  et  $Y$  s'entraînent au tir à l'arc.

$X$  atteint la cible 9 fois sur 10,  $Y$  atteint la cible 6 fois sur 10.  $Y$  joue deux fois sur trois.

Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

**Correction :** Notons  $C$  l'événement « la cible est atteinte »,  $J_X$  (resp.  $J_Y$ ) « le joueur est  $X$  (resp.  $Y$ ) ».

Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_{J_X}(C) \mathbb{P}(J_X) + \mathbb{P}_{J_Y}(C) \mathbb{P}(J_Y) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{10}.$$

### III.3 Formule de Bayes

**Théorème 7 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

Soient  $A, B$  deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}_A(B).$$

**Preuve :**

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$



**Remarque** : Si on considère l'événement A antérieur à l'événement B, on peut voir A comme la cause et B comme la conséquence. La formule de Bayes permet de renverser ces notions : connaissant la conséquence, quelle est la probabilité que telle cause ait eu lieu ?

**Exercice 7** : Reprenons l'exercice (6). L'un des joueurs a atteint la cible.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y ?

**Correction** : On cherche donc à calculer  $P_C(J_Y)$ .

Par la formule de Bayes, on a :

$$P_C(J_Y) = \frac{P(J_Y)}{P(C)} P_{J_Y}(C) = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{2}{3}}{\frac{4}{10}} = \frac{4}{7}.$$

Souvent, on a besoin d'utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer  $P(B)$ . On peut même généraliser à un système complet d'événements :

**Corollaire 71 (Formule de Bayes [1])** : Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini.

On considère un système complet d'événements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  de probabilités non nulles.

Si B est un événement de probabilité non nulle, alors :

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)} P_{A_j}(B).$$

**Preuve** : Il suffit d'utiliser la formule de Bayes et de remplacer le dénominateur en utilisant la formule des probabilités totales.

## IV INDÉPENDANCE

### IV.1 Avec deux événements

**Définition 8** : Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini.

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Supposons que A soit tel que  $P(A) \neq 0$ . Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \iff P_A(B) = P(B).$$

[1]. **Thomas Bayes**, né env. en 1702 à Londres - mort le 7 avril 1761 à Tunbridge Wells, dans le Kent, est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

**Proposition 8 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

Deux événements de probabilité non nulle  $A$  et  $B$  sont indépendants si, et seulement si  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$  ou  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ .

**Remarque :** Dans le cas où l'un des deux événements a une probabilité nulle, les événements sont de toute façon nécessairement indépendants (même si c'est absurde!).

Cette dernière expression est plus parlante : la probabilité de  $B$  est inchangée qu'on sache ou non que  $A$  est réalisé.

C'est plus proche de la notion intuitive d'indépendance, mais a plusieurs inconvénients : l'asymétrie, et l'hypothèse que  $A$  est de probabilité non nulle.

**Proposition 9 :** Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini,  $A$  et  $B$  deux événements.

- $A$  est indépendant avec lui-même si, et seulement si  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- $A$  et  $B$  sont indépendants si, et seulement si

**1**  $\bar{A}$  et  $B$ ,

**2**  $A$  et  $\bar{B}$ ,

**3** ou  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$

le sont aussi.

**Preuve :**

- $A$  est indépendant avec lui-même si, et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2 &\iff \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 0 \\ &\iff \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0 \\ &\iff \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1. \end{aligned}$$

- **1** Comme  $A$  et  $\bar{A}$  forment une partition de l'univers  $\Omega$ ,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ .

Or,  $A$  et  $B$  sont indépendants (ie)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

D'où  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$  (ie)

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{A}).$$

$\bar{A}$  et  $B$  sont donc indépendants.

**2** La démonstration est analogue en échangeant les rôles de  $A$  et  $B$ .

**3** D'après **(1)**  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants. Puis, d'après **(2)**,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

**Méthode 1 (Montrer que deux événements sont indépendants ou pas ...) :**

- On calcule séparément  $\mathbb{P}(A \cap B)$  et  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .
- Suivant l'égalité ou non, on conclue à l'indépendance ou non.

**Exercice 8 :** Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir.

Un client se présente et choisit un meuble.

On considère les évènements :

- F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

#### IV.2 Avec une famille d'évènements

Lorsqu'on considère plus de deux évènements, il y a deux manières de généraliser l'indépendance :

**Définition 9 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

On considère une famille finie d'évènements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

- Les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dits *deux à deux indépendants* lorsque :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

- Les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dits *mutuellement indépendants* lorsque :

$$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Il est clair que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque n'est pas vraie !

Des évènements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants. La condition est beaucoup plus forte que ça.

#### ATTENTION

Par exemple, pour trois évènements, on doit avoir  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$ ,  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3)$ ,  $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$  mais aussi  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$ .

Les conditions à vérifier deviennent rapidement affreuses quand on augmente le nombre d'évènements.

**Contre-Exemple 1 :** On considère une pièce qu'on lance deux fois et on considère les évènements suivants :

A : « On obtient pile au premier lancer »

B : « On obtient face au deuxième lancer »

C : « On obtient deux lancers différents »

1 <sup>er</sup> / 2 <sup>ème</sup>	P	F
P	(P, P)	(P, F)
F	(F, P)	(F, F)

On a  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ .

On voit facilement que  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$ .

Donc les événements sont deux à deux indépendants.

Pourtant,  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$  donc  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ .

Les événements ne sont pas mutuellement indépendants.

**Proposition 10 :** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

Pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $B_i = A_i$  ou  $B_i = \overline{A_i}$ .

Alors  $B_1, \dots, B_n$  sont mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

**Preuve :** On montre par récurrence sur  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$  la propriété

$\mathcal{P}(p)$  : si  $p$  des  $B_i$  sont  $\overline{A_i}$  (et les autres  $A_i$ ) alors  $B_1, \dots, B_n$  sont mutuellement indépendants.

Par hypothèse, les événements  $A_1, \dots, A_n$  étant mutuellement indépendants donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Supposons alors l'existence d'un  $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tel que  $\mathcal{P}(p)$  soit vraie.

On suppose que  $p+1$  des  $B_i$  sont des  $\overline{A_i}$  (et les autres des  $A_i$ ).

Soit  $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ . Nécessairement,  $\text{card}(I) \geq p+1$ .

Montrons que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)$ .

Quitte à réordonner les  $B_i$ , on peut supposer que  $I = \llbracket 1; q \rrbracket$ ,  $B_i = A_i$  pour  $i \in \llbracket 1; q-p \rrbracket$  et que  $B_i = \overline{A_i}$  pour  $i \in \llbracket q-p; q \rrbracket$ . On considère donc la probabilité :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{q-p-1} \cap \underbrace{\overline{A_{q-p}} \cap \dots \cap \overline{A_q}}_{p+1 \overline{A_i}}).$$

L'idée de la démonstration est de transformer un  $\overline{A_i}$  par exemple  $\overline{A_{q-p}}$  par  $A_i$  i.e.  $A_{q-p}$  à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \\ \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) \end{aligned}$$

Par commutativité de l'intersection, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{q-p-1} \cap \bar{A}_{q-p} \cap \dots \cap \bar{A}_q) \\ = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{q-p-1} \cap \underbrace{\bar{A}_{q-p+1} \cap \dots \cap \bar{A}_q}_{p \bar{A}_i}) + \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{q-p} \cap \underbrace{\bar{A}_{q-p+1} \cap \dots \cap \bar{A}_q}_{p \bar{A}_i}) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a alors :

$$= \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_{q-p-1}) \mathbb{P}(\bar{A}_{q-p+1}) \dots \mathbb{P}(\bar{A}_q) - \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_{q-p}) \mathbb{P}(\bar{A}_{q-p+1}) \dots \mathbb{P}(\bar{A}_q)$$

On factorise ...

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_{q-p-1}) \mathbb{P}(\bar{A}_{q-p+1}) \dots \mathbb{P}(\bar{A}_q) (1 - \mathbb{P}(A_{q-p})) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_{q-p-1}) \mathbb{P}(\bar{A}_{q-p+1}) \dots \mathbb{P}(\bar{A}_q) \mathbb{P}(\bar{A}_{q-p}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_{q-p-1}) \mathbb{P}(\bar{A}_{q-p}) \dots \mathbb{P}(\bar{A}_q) \end{aligned}$$

La famille  $(B_1, \dots, B_n)$  est donc mutuellement indépendante :  $\mathcal{P}(p+1)$  est vraie. La propriété est héréditaire.

Vraie pour  $p=0$  et héréditaire la propriété  $\mathcal{P}(p)$  est donc vraie pour tout  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .

Le raisonnement pour l'indépendance deux à deux est identique en plus simple et est laissé à l'étudiant sérieux.

**Corollaire 10.1 :** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements mutuellement indépendants et  $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ .

Alors :

- 1  $A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$  sont indépendants.
- 2  $A_1 \cup \dots \cup A_p$  et  $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont indépendants.
- 3  $A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont indépendants.
- 4  $A_1 \cup \dots \cup A_p$  et  $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$  sont indépendants.

Preuve :

1 On a, par définition de la mutuelle indépendance :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left((A_1 \cap \dots \cap A_p) \cap (A_{p+1} \cap \dots \cap A_n)\right) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n) \\ &= \left(\mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_p)\right) \left(\mathbb{P}(A_{p+1}) \dots \mathbb{P}(A_n)\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_p) \mathbb{P}(A_{p+1} \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

2 D'après la proposition précédente,  $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$  sont aussi mutuellement indépendants.

Les événements  $A = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_p}$  et  $B = \overline{A_{p+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}$  sont donc indépendants d'après le point précédent.

D'après la **proposition (9)**, les événements  $\overline{A} = A_1 \cup \dots \cup A_n$  et  $\overline{B} = A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont alors indépendants également.

**3** D'après la proposition précédente,  $A_1, \dots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_p}$  sont mutuellement indépendants.

Les événements  $A = A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $B = \overline{A_{p+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}$  sont donc aussi indépendants par le premier point.

La **proposition (9)** entraîne alors que  $A = A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $\overline{B} = A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont indépendants.

**4** Le dernier point se montre comme le précédent avec  $A = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_p}$  et  $B = A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$ .

La **proposition (9)** entraîne encore que  $\overline{A} = A_1 \cup \dots \cup A_p$  et  $B = A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$  sont indépendants.

**Exercice 9** : Soient A et B deux événements tels que  $P(A) = 0,4$  et  $P(B) = 0,3$ .

Calculer  $P(A \cap B)$  et  $P(A \cup B)$  :

**1** si A et B sont indépendants ;

**2** si A et B sont incompatibles.

*Un ingénieur pense que ses équations sont une approximation de la réalité.*

*Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.*

*Un mathématicien s'en moque.*

# Index

Additivité

$\sigma$ , 6

Bayes, 16

Espace

probabilisé, 5

fini, 13, 17

Événement, 2

certain, 3

contraire, 3

élémentaire, 2, 10

impossible, 3

incompatible, 3, 6

intersection, 3

réunion, 3

Expérience

aléatoire, 1

Formule

de Bayes, 16

Indépendance, 17, 19

deux à deux, 19

mutuelle, 19

Issues, 1

Partition, 4

Probabilité, 5, 8

composée, 15

conditionnelle, 12, 13

Croissance, 6

de l'événement contraire, 6

de l'événement impossible, 6

de la réunion, 6

totale, 16

uniforme, 10

Raisonnement

par disjonction de cas, 4

Système

complet d'événements, 4, 17

Univers, 1

fini, 5