

# XXIV

## Probabilités

Un médecin annonce à un de ses patients :

- J'ai une bonne et une mauvaise nouvelle, je commence par la mauvaise.

Vous avez une maladie grave dont on ne guérit qu'avec une probabilité de 1 sur 10.

- Et la bonne nouvelle docteur ?

- Mes neuf derniers patients sont morts...

### Contenu

I. Expérience aléatoire.....	<b>1</b>
I.1 L'Univers .....	1
I.2 Système complet d'événements .....	3
II. Probabilité.....	<b>5</b>
II.1 Espace probabilisé .....	5
II.2 Fondations .....	7
II.3 Probabilité uniforme .....	7
III. Probabilité conditionnelle .....	<b>8</b>
III.1 Probabilités composées .....	9
III.2 Probabilités totales .....	10
III.3 Formule de Bayes .....	10
IV. Indépendance.....	<b>11</b>
IV.1 Avec deux événements .....	11
IV.2 Avec une famille d'événements .....	12



## I EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

### I.1 L'Univers

**Définition 1 :** On appelle :

- *expérience aléatoire*, toute expérience dont on ne peut prédire l'issue avec certitude.
- *univers* l'ensemble, souvent noté  $\Omega$ , de toutes les issues possibles.
- *événement*, *éventualité* ou encore *issue* toute partie  $\omega$  de l'univers  $\Omega$ .
- *événement élémentaire* tout événement constitué d'une seule issue ou d'un seul élément.

**Remarques :**

- L'expérience est aléatoire : on ne sait pas à l'avance quelle en sera l'issue. Mais on suppose qu'on connaît l'ensemble des issues possibles.
- Il peut exister plusieurs modélisations associées à une même expérience aléatoire, et à chacune, on associera un univers différent. Pour le lancer du dé, on pourrait s'intéresser à la position du dé sur la table, ou la température de la pièce après le lancer... L'univers serait alors non plus  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  mais  $[0, 3] \times [0, 2]$  ou  $\mathbb{R}_+$ . Il faut donc toujours commencer par préciser l'univers avec lequel on travaille.

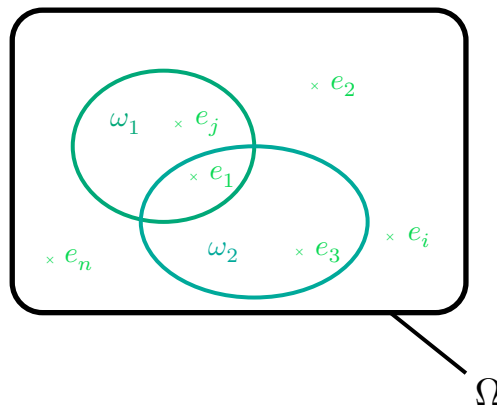


Figure XXIV.1 – Univers et événements

— Toute partie d'un univers fini est appelée un événement. L'ensemble des événements est donc  $\mathcal{P}(\Omega)$  (dont on connaît le cardinal)

### Exemples 1 :

- 1 On lance un dé. Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il y six événements élémentaires :  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$  à ne pas confondre avec les issues.

$A = \{2, 4, 6\}$  est un événement. Il peut être décrit par une phrase :  $A$  : « Obtenir un nombre pair »

- 2 On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Les résultats possibles sont :  $7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \dots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit$ .

$$\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \dots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$$

L'événement  $K$ : « Tirer un roi » : est  $K = \{R\heartsuit, R\diamondsuit, R\spadesuit, R\clubsuit\}$ .

- 3 Le temps d'attente avant la désintégration d'un noyau radioactif est un réel positif.

$$\Omega = \mathbb{R}_+$$

**Remarque** : lorsque l'univers est infini toutes les parties de  $\Omega$  ne sont pas des événements.

**Définition 2** : Soit  $\Omega$  un univers fini.

On appelle :

- événement *impossible* l'ensemble vide :  $\emptyset$
- événement *certain* l'univers entier :  $\Omega$

**Définition 3** : Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers fini  $\Omega$ .

- Le *complémentaire* de  $A$  dans  $\Omega$ , noté  $\overline{A}$ , est appelé événement *contraire* à  $A$ .
- La *réunion*  $A \cup B$  de  $A$  et  $B$  est un événement appelé «  $A$  ou  $B$  ».
- L'*intersection*  $A \cap B$  de  $A$  et  $B$  est un événement appelé «  $A$  et  $B$  ».
- Lorsque «  $A$  et  $B$  » est l'événement impossible (*i.e.*  $A \cap B = \emptyset$ ) les événements  $A$  et  $B$  sont dits *incompatibles*.

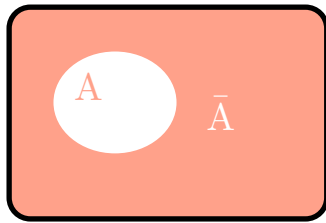


Figure XXIV.2 – Événement contraire

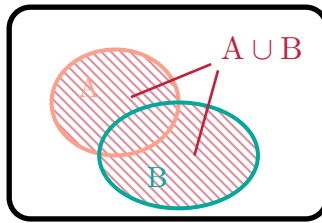


Figure XXIV.3 – Événement réunion

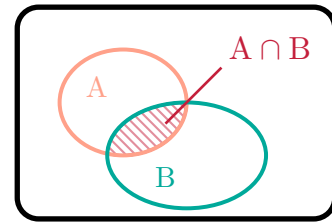


Figure XXIV.4 – Événement intersection

**Exemple 2 :** Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers  $\{P, F\}^2$ .

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.*  $A = \{(P; P), (P; F)\}$
- B l'événement « la deuxième pièce montre pile » *i.e.*  $B = \{(P; P), (F; P)\}$ .

1 L'événement  $A \cup B$  est « une des deux pièces montre pile » *i.e.*

$$A \cup B = \{(F; P), (P; P), (P; F)\}.$$

2 L'événement  $A \cap B$  est « les deux pièces montrent pile » *i.e.*

$$A \cap B = \{(P; P)\}.$$

3 L'événement contraire de A « la première pièce montre face » *i.e.*

$$\bar{A} = \{(F; P), (F; F)\}.$$

## I.2 Système complet d'événements

**Définition 4 :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

On appelle *système complet d'événements* de  $\Omega$  toute famille  $(A_1, \dots, A_n)$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ) d'événements telle que :

- 1  $\forall i \in [1; n], A_i \neq \emptyset$  (non vides)
- 2  $\forall i, j \in [1; n], i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$  (deux à deux incompatibles)
- 3  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  (recouvrant l'univers)

**Exemples 3 :**

1 Si A est un événement (non impossible et non certain), A et  $\bar{A}$  forment toujours un système complet d'événements.

C'est le cas le plus courant. Par exemple, en tirant une carte, soit la carte est rouge, soit elle n'est pas rouge.

2 Les événements :

- H: « Tirer un cœur »,
- S: « Tirer un pique »,
- D: « Tirer un carreau »,
- C: « Tirer un trèfle »

forment également un système complet d'événements.

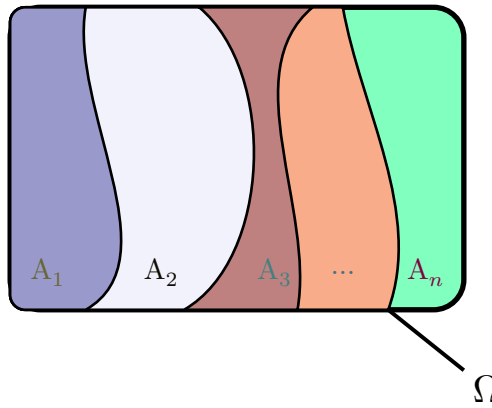


Figure XXIV.5 – Système complet d'événements.

**3** La famille  $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  formée des événements élémentaires, est un système complet d'événements de  $\Omega$

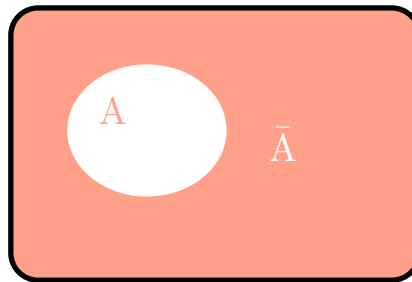


Figure XXIV.6 – Partition de l'univers à partir de A et  $\bar{A}$ .

	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
<i>À retenir ! :</i>	l'ensemble	l'univers
	un élément	une issue
	un singleton	un événement élémentaire
	une partie	un événement
	l'ensemble vide	l'événement impossible
	le complémentaire	l'événement contraire
	$A \cap B$	« A et B »
	$A \cup B$	« A ou B »
	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
	partition	système complet d'événements

## II PROBABILITÉ

### II.1 Espace probabilisé

**Définition 5 :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

- On appelle *probabilité* sur  $\Omega$  toute application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :

1  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

- 2 pour tout couple d'événements incompatibles A et B, on a :

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

- On appelle *espace probabilisé* tout couple  $(\Omega, \mathbb{P})$  où  $\Omega$  est un univers et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega$ .

**Exemple 4 :** On considère le lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- Une probabilité sur  $\Omega$  est  $\mathbb{P}_1 : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$  (dé non pipé)

$$A \mapsto \frac{1}{6} \text{card } A$$

- On peut aussi définir  $\mathbb{P}_2 : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$  (dé pipé pour tomber sur 6 à tous les coups)

$$A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases}$$

**Corollaire 0.1 :** Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega$  fini.

- 1 Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont des événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- 2 En particulier, si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$$

**Exercice 1 :** Déterminer une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$  telle que  $\mathbb{P}(\{k\})$  soit proportionnelle à  $k^2$ .

**Proposition 1 (Propriétés) :** Soit  $(\Omega; \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

- 1  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$  (probabilité de l'événement contraire)

- 2  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  (probabilité de l'événement impossible)

- 3 Si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ .

- 4 Si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  (croissance de la probabilité)

$$\boxed{5} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad (\text{probabilité de la réunion})$$

**Exercice 2 :** Soient A et B des événements d'un univers  $\Omega$  tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 0,3; \quad \mathbb{P}(B) = 0,4 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,9.$$

Quelle est la probabilité que se réalise l'un des événements A ou B ?

**Corollaire 1.1 :** Soient  $(\Omega; \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$  une famille d'événements.

Alors,

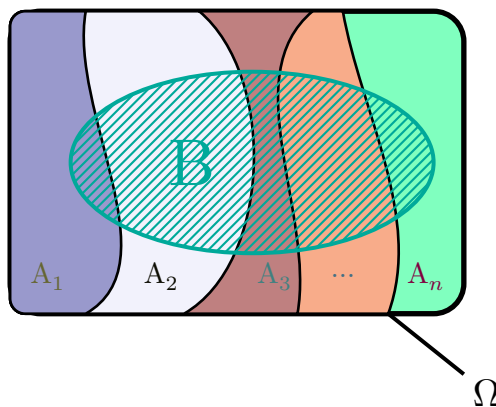
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(A_i).$$

**Corollaire 1.2 (Propriété des probabilités totales) :** Soient  $(\Omega; \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements.

Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

En particulier, si  $B = \Omega$ , on retrouve  $1 = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ .



**Figure XXIV.7** -  $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$

**II.2 Fondations**

**Théorème 2 :** Soient  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  et  $p_1, p_2, \dots, p_n$  des réels.

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

**1**  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

**2** Il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ .

En particulier,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ \omega_i \in A}} p_i.$$

**Remarque :** Les deux conditions de la première assertion entraînent aussi que  $p_i \leq 1$ . Ce n'est qu'une condition nécessaire.

**Exemple 5 :** Pour le lancer d'un dé, on peut poser :

$\omega$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	0,2	0,05	0,3	0,05	0,3	0,1

Et alors, si on considère l'événement :  $E = \llcorner \text{Obtenir un nombre pair} \lrcorner$ , on a  $E = \{2, 4, 6\}$ .

D'où  $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 0,05 + 0,05 + 0,1 = 0,2$ .

**II.3 Probabilité uniforme**

De manière générale, soit  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  un univers fini. Il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}.$$

**Définition 6 :** Soit  $\Omega$  un univers fini.

On appelle *probabilité uniforme*, ou *équiprobabilité* sur  $\Omega$  l'unique probabilité attribuant la même probabilité à tous les événements élémentaires.

**Remarque :** Si  $\text{card}(\Omega) = n$  alors la probabilité de chaque événement élémentaire est  $p = \frac{1}{n}$ .

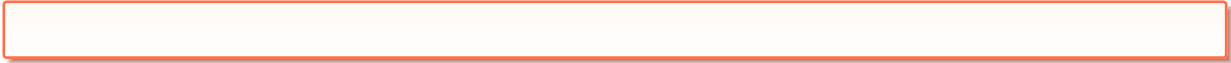
$\omega$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\dots$	$\omega_n$
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$p$	$p$	$\dots$	$p$

En effet,  $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \sum_{\omega \in \Omega} 1 = pn$ .

**Proposition 3 :** Soit  $\Omega$  un univers fini, et  $\mathbb{P}$  la probabilité uniforme sur  $\Omega$ .

Alors, pour tout événement  $A$  :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

**ATTENTION**

Cette relation ne s'applique que pour la probabilité uniforme.

Si on reprend l'exemple (5) du dé précédent, on avait  $P(E) = 0,2$ .

$$\text{Or, } \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq P(E).$$

**Remarque** : L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique lorsqu'aucun événement élémentaire n'est favorisé.

**Exercice 3** : On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

- 1 Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?
- 2 Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

### III PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

**Exemple 6** : Dans une classe, en notant :

- G : les élèves mesurant plus de 1,80m
- H les étudiants de sexe masculin.

	G	$\bar{G}$	Total
H	8	12	20
$\bar{H}$	3	11	14
Total	11	23	34

On obtient la répartition ci-contre :

On choisit un élève au hasard pour passer au tableau.

- La probabilité que l'élève soit grand est  $P(G) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{11}{34}$ .
- La probabilité que l'élève soit grand parmi les élèves de sexe masculin est

$$P_H(G) = \frac{\text{card}(G \cap H)}{\text{card}(H)} = \frac{8}{20}.$$

- La probabilité que l'élève soit de sexe masculin parmi les grands est

$$P_G(H) = \frac{\text{card}(G \cap H)}{\text{card}(G)} = \frac{8}{11}.$$

On remarquera que  $P(G) \neq P_H(G)$  et on dira plus tard que les événements G et H ne sont pas indépendants.

**Définition 7** : On considère un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$  et A un événement tel que  $P(A) \neq 0$ .

On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A*, notée  $P(B|A)$  ou  $P_A(B)$  le quotient :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$



**Proposition 4 :** Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $A$  un événement tel que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ .

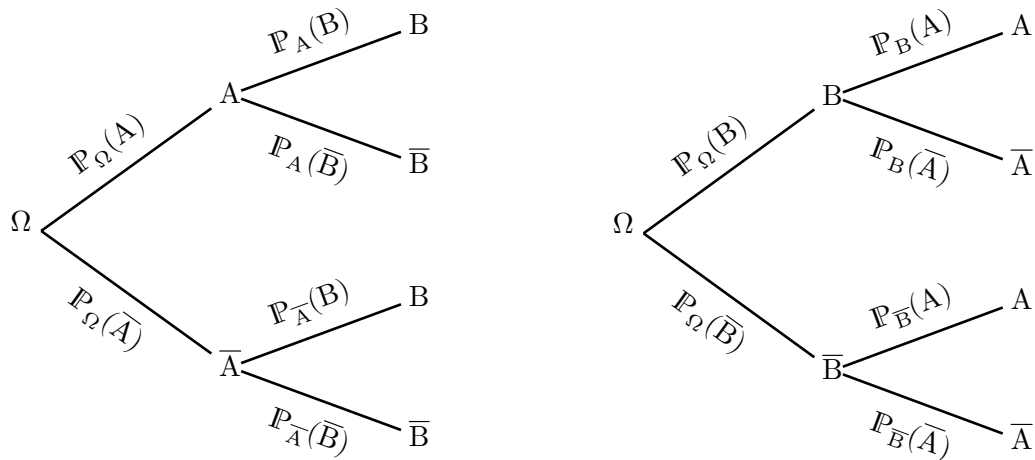
L'application  $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  est une probabilité sur  $\Omega$  appelée *probabilité*

$$B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

*conditionnelle sachant  $A$ .*

**Remarques :**

- 1] Toute probabilité peut être vue comme une probabilité conditionnelle :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_\Omega(A)$ .
- 2] Les probabilités conditionnelles sont les probabilités écrites sur les branches :



- 3] La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent :

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B).$$

$$A = (B \cap A) \cup (\bar{B} \cap A)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\bar{B} \cap A).$$

**Exercice 4 :** On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

- 1] Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?
- 2] Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

### III.1 Probabilités composées

**Théorème 5 :** Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  une famille finie d'événements tels que  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ .

Alors, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) \text{ si } \mathbb{P}(B) \neq 0. \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \text{ si } \mathbb{P}(A) \neq 0. \end{aligned}$$

**Remarque** : Cette formule correspond simplement à la multiplication des probabilités sur les branches d'un arbre lors de son parcours.

**Exercice 5** : Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

### III.2 Probabilités totales

**Théorème 6 (Propriété des probabilités totales bis)** : Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  un système complet d'événements (tous non impossibles).

Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i).$$

**Remarque** : Cette formule correspond simplement à la disjonction des cas.

**Exercice 6** : X et Y s'entraîne au tir à l'arc.

X atteint la cible 9 fois sur 10, Y atteint la cible 6 fois sur 10. Y joue deux fois sur trois.

Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

### III.3 Formule de Bayes

**Théorème 7** : Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}_A(B).$$

**Remarque** : Si on considère l'événement A antérieur à l'événement B, on peut voir A comme la cause et B comme la conséquence. La formule de Bayes permet de renverser ces notions : connaissant la conséquence, quelle est la probabilité que telle cause ait eu lieu ?

**Exercice 7** : Reprenons l'exercice (6). L'un des joueurs a atteint la cible.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y ?

**Corollaire 7.1 (Formule de Bayes <sup>[1]</sup>)** : Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

On considère un système complet d'événements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  de probabilités non nulles.

Si B est un événement de probabilité non nulle, alors :

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)} \mathbb{P}_{A_j}(B).$$

## IV INDÉPENDANCE

### IV.1 Avec deux événements

**Définition 8 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont *indépendants* lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

**Proposition 8 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

Deux événements de probabilité non nulle  $A$  et  $B$  sont indépendants si, et seulement si  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$  ou  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ .

**Proposition 9 :** Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini,  $A$  et  $B$  deux événements.

- $A$  est indépendant avec lui-même si, et seulement si  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- $A$  et  $B$  sont indépendants si, et seulement si

**1**  $\bar{A}$  et  $B$ ,

**2**  $A$  et  $\bar{B}$ ,

**3** ou  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$

le sont aussi.

**Méthode 1 (Montrer que deux événements sont indépendants ou pas ...) :**

- On calcule séparément  $\mathbb{P}(A \cap B)$  et  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .
- Suivant l'égalité ou non, on conclue à l'indépendance ou non.

**Exercice 8 :** Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir.

Un client se présente et choisit un meuble.

On considère les événements :

- $F$  : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- $C$  : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux événements sont indépendants.

[1]. **Thomas Bayes**, né env. en 1702 à Londres - mort le 7 avril 1761 à Tunbridge Wells, dans le Kent, est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

**IV.2 Avec une famille d'événements**

Lorsqu'on considère plus de deux événements, il y a deux manières de généraliser l'indépendance :

**Définition 9 :** Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

On considère une famille finie d'événements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

- Les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dits *deux à deux indépendants* lorsque :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

- Les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dits *mutuellement indépendants* lorsque :

$$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Il est clair que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque n'est pas vraie !

Des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants. La condition est beaucoup plus forte que ça.

**ATTENTION**

Par exemple, pour trois événements, on doit avoir  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$ ,  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3)$ ,  $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$  mais aussi  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$ .

Les conditions à vérifier deviennent rapidement affreuses quand on augmente le nombre d'événements.

**Contre-Exemple 1 :** On considère une pièce qu'on lance deux fois et on considère les événements suivants :

A : « On obtient pile au premier lancer »

B : « On obtient face au deuxième lancer »

C : « On obtient deux lancers différents »

1 <sup>er</sup> / 2 <sup>ème</sup>	P	F
P	(P, P)	(P, F)
F	(F, P)	(F, F)

On a  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ .

On voit facilement que  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$ .

Donc les événements sont deux à deux indépendants.

Pourtant,  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$  donc  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ .

Les événements ne sont pas mutuellement indépendants.

**Proposition 10 :** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.

Pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $B_i = A_i$  ou  $B_i = \overline{A_i}$ .

Alors  $B_1, \dots, B_n$  sont mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.

**Corollaire 10.1 :** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements mutuellement indépendants et  $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ .

Alors :

- 1  $A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$  sont indépendants.
- 2  $A_1 \cup \dots \cup A_p$  et  $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont indépendants.
- 3  $A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont indépendants.
- 4  $A_1 \cup \dots \cup A_p$  et  $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$  sont indépendants.

**Exercice 9 :** Soient A et B deux événements tels que  $P(A) = 0,4$  et  $P(B) = 0,3$ .

Calculer  $P(A \cap B)$  et  $P(A \cup B)$  :

- 1 si A et B sont indépendants ;
- 2 si A et B sont incompatibles.

*Un ingénieur pense que ses équations sont une approximation de la réalité.*

*Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.*

*Un mathématicien s'en moque.*