Probabilités

I Espaces de probabilités

Exercice 1 : Les fonctions suivantes, définies sur les singletons, se prolongent-elles en une probabilité Ω ?

1. $\Omega = [\![0, n]\!]$ et $P(\{k\}) = \binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k$;
2. $\Omega = [\![1, 2n]\!]$ et $P(\{k\}) = \dfrac{1}{n}\left|1 - \dfrac{k}{n}\right|$.

Exercice 2 : Soient A, B des événements d'un même espace probabilisé (Ω, P).

On suppose que $P(A) = P(B) = \dfrac{3}{4}$. Déterminer un encadrement de $P(A \cap B)$ et de $P(A \cup B)$.

Exercice 3 : On tire dans un jeu de 52 cartes une main de 5 cartes.

Quelle est la probabilité pour que cette main contienne exactement une dame et deux cœurs ?

Correction : On note :

- A : « la main contient exactement une dame et deux cœurs ».
- D : « la main contient la dame de cœur ».

1. On discute selon que la main contienne ou pas la dame de cœur i.e. cela revient à écrire

$$A = A \cap \Omega = A \cap (D \sqcup \overline{D}) = (A \cap D) \sqcup (A \cap \overline{D})$$

ce qui est l'expression de la loi des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \overline{D}).$$

2. On dénombre l'événement $A \cap D$: « la main contient exactement une dame et deux cœurs, dont la dame de cœur ».
La main contient donc :
   - la dame de cœur ;
   - un autre cœur ;
   - 3 autres cartes (ni cœur, ni dame).

Donc,

$$\operatorname{card}(A \cap D) = \binom{1}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{3} = 85\ 680.$$

Et,

$$P(A \cap D) = \frac{\operatorname{card}(A \cap D)}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{85\,680}{2\,598\,960} = \frac{3}{91}.$$

3. On dénombre l'événement $A \cap \overline{D}$: « la main contient exactement une dame et deux cœurs, mais pas la dame de cœur ».
La main contient donc :
   - une dame (mais pas la dame de cœur) ;
   - deux cœurs (mais pas la dame) ;
   - 2 autres cartes (ni cœur, ni dame).

Donc,

$$\text{card}\,(\text{A} \cap \overline{\text{D}}) = \binom{3}{1}\binom{12}{2}\binom{36}{2} = 124\ 740.$$

Et,

$$\text{P}(\text{A} \cap \overline{\text{D}}) = \frac{\text{card}\,(\text{A} \cap \text{D})}{\text{card}\,\Omega} = \frac{124\ 740}{2\ 598\ 960} = \frac{297}{6188}.$$

En conclusion,

$$\text{P}(\text{A}) = \text{P}(\text{A} \cap \text{B}) + \text{P}(\text{A} \cap \overline{\text{B}}) = \frac{3}{91} + \frac{297}{6188} = \frac{501}{6188}.$$

Exercice 4 (Les anniversaires) : Déterminer, en précisant les hypothèses, la probabilité de trouver dans un groupe de n personnes choisies au hasard, au moins deux personnes ayant leur anniversaire le même jour.

Calculer une valeur approchée pour $n \in \{23, 30, 50\}$.

Correction :

- Quand on a 2 personnes, la première peut avoir son anniversaire n'importe quand, la seconde n'importe quel autre jour.

  On a donc :
$$p_2 = \frac{364}{365} = 1 - \frac{1}{365}.$$
- Quand on a 3 personnes, la troisième doit avoir son anniversaire un jour différent des 2 autres :
$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right).$$
- On peut réitérer le raisonnement. Pour un groupe de n personnes, on obtient :
$$p_n = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

Une petite application numérique donne :

Nombre de personnes	Probabilité pour que les anniversaires tombent tous un jour différent
1	1
2	0,99
5	0,97
10	0,88
20	0,58
22	0,52
23	0,49
30	0,29
50	0,03

Il ne faut donc que 23 personnes pour qu'il y ait plus d'une chance sur 2 pour que 2 personnes aient leur anniversaire le même jour, contrairement à ce que l'intuition laisse présumer.

À partir de 50 personnes, il n'y a que 3% de chances que tous les anniversaires diffèrent !

Exercice 5 : On tire au hasard un entier entre 1 et 900.

1 Quelle est la probabilité qu'il soit pair, mais ni multiple de 4, ni multiple de 6 ?

2 Pour tout j diviseur de 900, calculer $P(E_j)$ où E_j : « Être multiple de j ».

Correction :

1 Notons :

- E_2 : « le nombre tiré est pair ». $E_2 = \{2, 4, \dots, 900\}$.

$$P(E_2) = \frac{\operatorname{card} E_2}{900} = \frac{450}{900} = \frac{1}{2}.$$

- E_4 : « le nombre tiré est multiple de 4 ». $E_4 = \{4, 8, \dots, 900\}$.

$$P(E_4) = \frac{\operatorname{card} E_4}{900} = \frac{225}{900} = \frac{1}{4}.$$

- E_6 : « le nombre tiré est multiple de 6 ». $E_6 = \{6, 12, \dots, 900\}$.

$$P(E_6) = \frac{\operatorname{card} E_6}{900} = \frac{150}{900} = \frac{1}{6}.$$

- E_{12} : « le nombre tiré est multiple de 12 ». $E_{12} = \{12, 24, \dots, 900\}$.

$$P(E_{12}) = \frac{\operatorname{card} E_{12}}{900} = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}.$$

L'événement A : « le nombre tiré est pair, mais ni multiple de 4, ni multiple de 6 » s'écrit :

$$A = E_2 \setminus (E_4 \cup E_6)$$

D'où,

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(E_2 \setminus (E_4 \cup E_6)) \\
&= P(E_2) - P(E_4 \cup E_6) \\
&= P(E_2) - [P(E_4) + P(E_6) - P(E_4 \cap E_6)] \\
&= P(E_2) - [P(E_4) + P(E_6) - P(E_{12})] \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2 Soit j un diviseur de 900. Posons $900 = qj$ avec $q \in \mathbb{N}$.

$$E_j = \{j, 2j, 3j, \dots, qj\}$$

$\operatorname{card} E_j = q$ donc $P(E_j) = \dfrac{\operatorname{card} E_j}{\operatorname{card} \Omega} = \dfrac{q}{qj}\dfrac{1}{j}$.

ATTENTION aux *effets de bord* :

Si on avait eu

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, 900\}$$

la probabilité de tirer un nombre pair aurait été :

$$P(E_2) = \frac{\operatorname{card} E_2}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{451}{901} \neq \frac{1}{2}.$$

Exercice 6 : Dix paires de chaussures toutes différentes sont rangées dans un placard.

On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir deux paires de chaussures ?
2. d'obtenir au moins une paire de chaussures ?
3. d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Correction : Notons les chaussures par une lettre (G pour gauche, D pour droite) et un indice faisant référence au numéro de la paire.

Le placard contient donc

$$\mathrm{G}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{G}_2, \mathrm{D}_2, \ldots, \mathrm{G}_{10}, \mathrm{D}_{10}$$

Une issue est constituée d'un ensemble de 4 chaussures.
Par exemple $\{\mathrm{G}_3, \mathrm{G}_5, \mathrm{G}_7, \mathrm{D}_8\}$.

L'univers Ω est donc l'ensemble de ces parties à quatre éléments du placard. On suppose qu'il y a équiprobabilité sur cet univers.

$$\operatorname{card} \Omega = \binom{20}{4}$$

1. On note A : « on obtient deux paires de chaussures ».

$$\mathrm{A} = \{\{\mathrm{G}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{G}_2, \mathrm{D}_2\}, \{\mathrm{G}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{G}_3, \mathrm{D}_3\}, \ldots \{\mathrm{G}_9, \mathrm{D}_9, \mathrm{G}_{10}, \mathrm{D}_{10}\}\}$$

On a $\operatorname{card} \mathrm{A} = \binom{10}{2}$: il suffit de choisir deux paires parmi 10.

Comme on a supposé l'équiprobabilité sur Ω, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\operatorname{card} \mathrm{A}}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323}.$$

2. On note B : « on obtient au moins une paire de chaussures ».

$\overline{\mathrm{B}}$: « on n'obtient aucune paire de chaussures ».

- 20 choix pour la première chaussure ;
- pour chacun de ces choix, 18 choix pour la deuxième chaussure : il reste 19 chaussures, mais on exclut la chaussure qui ferait la paire avec la première choisie.
- pour chacun de ces choix, 16 choix pour la troisième chaussure : il reste 18 chaussures, mais on exclut les deux chaussures qui feraient une paire avec l'une des deux premières choisies.
- pour chacun de ces choix, 14 choix pour la quatrième chaussure : il reste 17 chaussures, mais on exclut les trois chaussures qui feraient une paire avec l'une des trois premières choisies.

On obtient donc $20 \times 18 \times 16 \times 14$ choix **ordonnés** de quatre chaussures sans aucune paire.

Mais chaque événement élémentaire (par exemple $\{\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3, \mathrm{G}_4\}$) a été compté $4!$ fois : autant de permutations de ces 4 chaussures.

Donc,

$$\operatorname{card} \overline{\mathrm{B}} = \frac{20 \times 18 \times 16 \times 14}{4!}.$$

Puis,

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - \frac{\frac{20\times18\times16\times14}{4!}}{\binom{20}{4}} = \frac{99}{323}.$$

Autre manière de voir : pour n'avoir aucune paire à la fin, il faut que les 4 chaussures choisies appartiennent à 4 paires distinctes.

Il faut donc choisir :

- 4 paires parmi 10 : $\binom{10}{4}$ choix ;
- pour chacun de ces choix, prendre dans chacune des paires choisies la chaussure droite ou la chaussure gauche : 2^4 choix de pied au total.

$$\mathrm{card}\,(\overline{\mathrm{B}}) = \binom{10}{4} \times 2^4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4!}\times 2^4 = \frac{20\times18\times16\times14}{4!}.$$

3. On note C : « on obtient une et une seule paire de chaussures ».

Rappel :

- A : « on obtient deux paires de chaussures ».
- B : « on obtient au moins une paire de chaussures ».

On a donc $\mathrm{C} = \mathrm{B}\setminus\mathrm{A}$.
Et comme $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$, on peut utiliser la formule :

$$\mathrm{P(B\setminus A)} = \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A)} = \frac{96}{323}.$$

II Probabilités conditionnelles

Exercice 7 (Vrai ou Faux ?) :

1. Quel que soit l'événement A, on a $\mathrm{P_A(A)} = 1$.
2. Si $\mathrm{P(A)} = 0,5$ et $\mathrm{P(A\cap B)} = 0,2$ alors $\mathrm{P_A(B)} = 0,4$.
3. Si $\mathrm{P(A)} \neq 0$, alors pour tout événement B, on a $\mathrm{P_A(A\cup B)} = 1$.
4. Si $\mathrm{P_A(B)} = 0$, alors A et B sont incompatibles.

Correction :

1. Faux. Si $\mathrm{A} = \emptyset$, la probabilité sachant A n'est pas définie !
2. Vrai. $\mathrm{P_A(B)} = \dfrac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4.$
3. Vrai.

$$\mathrm{P_A(A\cup B)} = \frac{\mathrm{P(A\cap(A\cup B))}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\mathrm{P((A\cap A)\cup(A\cap B))}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\mathrm{P(A\cup(A\cap B))}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(A)}} = 1$$

ou $\mathrm{A}\subset\mathrm{A\cup B}$ donc $\mathrm{P_A(A)} \leqslant \mathrm{P_A(A\cup B)}$ donc $1 \leqslant \mathrm{P_A(A\cup B)} \leqslant 1$.

4. Faux. On a bien $\mathrm{P_A(B)} = 0 \implies \mathrm{P(A\cap B)} = 0$
Mais $\mathrm{P(A\cap B)} = 0 \;\cancel{\Longrightarrow}\; \mathrm{A\cap B} = \emptyset$

Remarque :

- Un événement de probabilité nulle est dit **presque impossible**;
- Un événement de probabilité égale à 1 est dit **presque certain**.

Exercice 8 : 10 garçons et 15 filles descendent de manière désordonnée d'un bus. Quelle est la probabilité que les 3 premiers à descendre soient des garçons et que la quatrième soit une fille ?

Correction : On note G_i l'événement : « La $i^{\text{ème}}$ personne à descendre est un garçon » et on s'intéresse à l'événement $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \overline{G}_4$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \overline{G}_4) &= \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}_{G_1}(G_2) \times \mathbb{P}_{G_1 \cap G_2}(G_3) \times \mathbb{P}_{G_1 \cap G_2 \cap G_3}(\overline{G}_4)\\ &= \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{8}{23} \times \frac{15}{22}\end{aligned}$$

Exercice 9 : Une urne contient au départ 1 boule blanche et 2 boules noires. On fait des tirages successifs. Après chaque tirage, on remet la boule tirée et on rajoute dans l'urne k boules de la même couleur que la boule qui vient d'être tirée. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au troisième tirage ? au quatrième ?

Exercice 10 : Un gardien de phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clefs, dont une et une seule convient. Il essaie les clefs au hasard les unes après les autres. Calculer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

Exercice 11 : Une urne contient b boules blanches, n noires et r rouges. Un joueur tire une boule. S'il obtient une boule blanche, il gagne le jeu ; si la boule est noire, il perd le jeu, et si la boule est rouge, le joueur enlève cette boule de l'urne et en retire une autre.

1. Quel est le nombre de tirages possibles pour un gain du joueur ?

   Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne en k tirages ?
2. On note p_r la probabilité pour que le joueur gagne le jeu avec une urne contenant initialement la distribution donnée (b, n, r). Trouver une relation entre p_r et p_{r-1}.

   En déduire p_r.

Exercice 12 : On considère un jeu de dominos. Chaque domino présente deux faces égales (doubles) ou différentes (simples). Ces faces portent un numéro de 0 à 6. Tous les dominos sont différents et toutes les associations existent.

1. Combien y a-t-il de dominos dans le jeu ?
2. On tire au hasard deux dominos. Quelle est la probabilité pour qu'ils aient une face commune ?

Correction :

1. On note chaque domino par un nombre à deux chiffres, où le plus petit numéro figure en premier. Par exemple, 00 ou 35 ou 66.

   Il y a :

   - 7 dominos avec un "blanc" en premier : 00 à 06 ;
   - 6 dominos avec un 1 en premier : 11 à 16 ;
   - ...
   - 1 dominos avec un 6 en premier : 66.

   Au total, il y a $1 + 2 + \cdots + 7 = \dfrac{7 \times 8}{2} = 28$ dominos.

   Le jeu de dominos

00	01	02	03	04	05	06
	11	12	13	14	15	16
		22	23	24	25	26
			33	34	35	36
				44	45	46
					55	56
						66

2 Imaginons qu'on décompose l'expérience en deux étapes : on tire un premier domino, et ensuite un second (sans avoir remis le premier). On peut donc attribuer un ordre aux dominos tirés.

Par exemple, on tire le 04 puis le 15. On note l'issue correspondant $04 \cdot 15$ L'univers est alors

$$\Omega = \{00 \cdot 01, \cdots, 66 \cdot 56\}$$

	00	01	$\cdots$	56	66
00	$\propto$	$00 \cdot 01$		$00 \cdot 56$	$00 \cdot 66$
01	$01 \cdot 00$	$\propto$		$01 \cdot 56$	$01 \cdot 66$
$\vdots$					
56	$56 \cdot 00$	$56 \cdot 01$		$\propto$	$56 \cdot 66$
66	$66 \cdot 00$	$66 \cdot 01$		$66 \cdot 56$	$\propto$

On suppose qu'il y a équiprobabilité sur Ω d'où $\operatorname{card}\Omega = 28 \times 27 = 756$.

On note :

- F: « les deux dominos tirés ont une face commune »
- D_1: « le premier domino tiré est un double »

On a $\mathrm{F} = \mathrm{F} \cap (\mathrm{D}_1 \sqcup \overline{\mathrm{D}}_1) = (\mathrm{F} \cap \mathrm{D}_1) \sqcup (\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{D}}_1)$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F}) &= \mathrm{P}\left((\mathrm{F} \cap \mathrm{D}_1) \sqcup (\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{D}}_1)\right) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \mathrm{D}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{D}}_1) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{D}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{F}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}_1)\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}_1}(\mathrm{F}).
\end{aligned}$$

Or,

- $\mathrm{P}(\mathrm{D}_1) = \dfrac{\operatorname{card}\mathrm{D}_1}{\operatorname{card}\Omega} = \dfrac{7 \times 27}{28 \times 27} = \dfrac{1}{4}$.
- $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{F}) = \dfrac{6 \times 7}{27 \times 7} = \dfrac{6}{27}$
- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}_1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{D}_1) = \dfrac{3}{4}$.
- $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}_1}(\mathrm{F}) = \dfrac{12 \times 7}{27 \times 7} = \dfrac{12}{27}$

D'où

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{27} + \frac{3}{4} \times \frac{12}{27} = \frac{7}{18}.$$

Exercice 13 : On lance une pièce. p est la probabilité d'obtenir *Pile* avec cette pièce ($p \in]0, 1[$).
Le joueur gagne dès qu'il obtient pour la première fois deux *Pile* consécutifs.

p_n est la probabilité pour que le joueur gagne avec n lancers.

Trouver une formule liant p_{n+2}, p_{n+1}, et p_n. En déduire p_n en fonction de p et n.

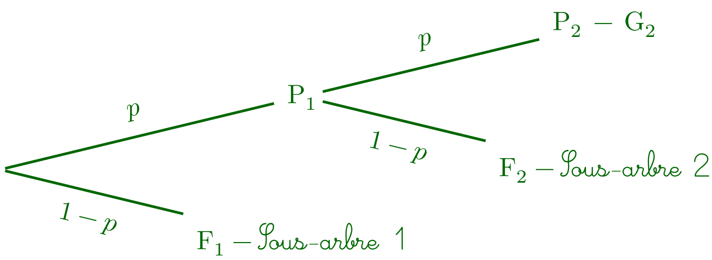
Correction : On note :

- P_k :« obtenir Pile au k-ième lancer »;
- F_k :« obtenir Face au k-ième lancer »;
- G_k :« gagner au k-ième lancer ».

On a :

1. $p_1 = \mathbb{P}(G_1) = 0$
2. $p_2 = \mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) = p^2$

Soit $n \geqslant 3$.



Les sous-arbres sont identiques à l'arbre entier.

Pour gagner en n étapes, on peut :

- soit gagner en $n-1$ étapes dans le sous-arbre 1;
- soit gagner en $n-2$ étapes dans le sous-arbre 2.

$$\mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}_{SA1}(G_n)\mathbb{P}(SA1) + \mathbb{P}_{SA2}(G_n)\mathbb{P}(SA2).$$

Posons $q = 1-p$:

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(G_n) \\ &= \mathbb{P}_{SA1}(G_n)\mathbb{P}(SA1) + \mathbb{P}_{SA2}(G_n)\mathbb{P}(SA2) \\ &= qp_{n-1} + pqp_{n-2} \end{aligned}$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+2} = qp_{n+1} + pqp_n.$$

La suite (p_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est $r^2 - qr - pq = 0$.

- Son discriminant est $\Delta = q^2 + 4pq > 0$.
- Ses racines sont $r_1 = \dfrac{q - \sqrt{q^2+4pq}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{q + \sqrt{q^2+4pq}}{2}$.

Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n \\ &= \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}} \left[\left(\frac{q + \sqrt{q^2+4pq}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{q - \sqrt{q^2+4pq}}{2} \right)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

III PROBABILITÉS TOTALES

Exercice 14 : Dans une population, un individu contracte une maladie avec une probabilité égale à 35%.

On organise une campagne de vaccination qui touche 45% de la population.

Les personnes vaccinées contractent tout de même la maladie avec une probabilité de 1%.

Quelle est à l'issue de la campagne de vaccination la probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade.

Correction : *On note V l'événement « la personne est vaccinée » et M l'événement « la personne est malade ».*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{M}) &= \mathbb{P}(\mathrm{M}\cap\mathrm{V}) + \mathbb{P}(\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{V}}) \\ &= \mathbb{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M})\mathbb{P}(\mathrm{V}) + \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})\mathbb{P}(\overline{\mathrm{V}}) \\ &= \frac{1}{100}\times\frac{45}{100}+\frac{35}{100}\times\left(1-\frac{45}{100}\right) \\ &= \frac{1}{100}\times\frac{45}{100}+\frac{35}{100}\times\left(1-\frac{45}{100}\right) \\ &\simeq 19,7\%.\end{aligned}$$

Exercice 15 : Chaque jour Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

— S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là).
— S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'évènement « Bill achète du pain le $n^{\text{ème}}$ » et on note $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$.

Aujourd'hui (le 1$^{\text{er}}$ jour), Bill a acheté du pain, ainsi $p_1 = 1$.

1. Montrer que $p_{n+1} = 0,8 - 0,5p_n$.
2. En déduire que $p_n = \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 16 : La probabilité d'avoir un accident avec un taux d'alcoolémie autorisé est 10% mais passe à 25% lorsque le seuil est dépassé. p est la proportion d'accidents survenus avec un taux élevé.

Quelle est la proportion de personnes prenant le volant avec un fort taux d'alcoolémie ?

Exercice 17 : Un avion est prévu tous les matins en direction de Londres. Si un matin donné il est à l'heure, il a une chance sur 4 d'être à l'heure le lendemain. S'il est en retard un matin, il a 9 chances sur 10 d'être à l'heure le lendemain. Le premier jour, l'avion est à l'heure. Calculer la probabilité que l'avion soit à l'heure le n-ième jour. Que se passe-t-il au bout d'un an ?

Exercice 18 : Pompon est un chat fugueur ; s'il a trouvé sa gamelle pleine le matin, il revient le lendemain matin avec une probabilité de $0,4$. Mais s'il a trouvé sa gamelle vide, poussé par la faim, il revient le lendemain matin avec une probabilité de $0,8$. Dédé qui nourrit Pompon, remplit sa gamelle 9 matins sur 10. Clément arrive à l'improviste un matin chez Dédé ; quelle est la probabilité qu'il y voie Pompon ?

Exercice 19 : Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle ABC selon le protocole suivant :

- Lorsqu'à un instant donné elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité $0,75$ et en C avec la probabilité $0,25$;
- Lorsqu'à un instant donné elle se situe en B, elle se fixe à l'instant suivant en A avec la probabilité $0,75$ et en C avec la probabilité $0,25$;
- Si à un instant donné elle se situe en C, elle ira systématiquement en B à l'instant suivant.

On désigne par a_n, b_n, c_n les probabilités qu'à l'instant n, la particule se situe en A, B ou C.

1. Déterminer les relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
2. En déduire l'existence d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$${}^t(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = \mathrm{M}\ {}^t(a_n\ b_n\ c_n),\text{ puis que } {}^t(a_n\ b_n\ c_n) = \mathrm{M}^n\ {}^t(a_0\ b_0\ c_0).$$
3. Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
4. En déduire l'expression de M^n puis de a_n, b_n, c_n en fonction de n.
5. Calculer les limites quand n tend vers l'infini des probabilités a_n, b_n, c_n.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Comme $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n)$ forme un système complet d'événements. On va pouvoir utiliser la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{A}_n) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{B}_n) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{C}_n) \\ &= \mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \mathrm{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1})\mathrm{P}(\mathrm{C}_n) \\ &= 0a_n + 0,75b_n + 0c_n \\ &= 0,75b_n \end{aligned}$$

On détermine de même les autres probabilités :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,75b_n \\ b_{n+1} = 0,75a_n + c_n \\ c_{n+1} = 0,25a_n + 0,25b_n \end{cases}$$

2. Le résultat précédent se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

En posant $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{MX}_n \underset{\text{Par récurrence}}{\Longrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{X}_0.$$

3. Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve facilement que :

$$\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & -0,75 \end{pmatrix} = \Delta.$$

4 On a $\mathrm{M} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$ et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^n &= \mathrm{P}\Delta^n\mathrm{P}^{-1} \\
&= \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0,75)^n \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \\
&= \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0,75)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7(-0,25)^n & 7(-0,25)^n & -28(-0,25)^n \\ 25(-0,75)^n & -45(-0,75)^n & 60(-0,75)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 24+21(-0,25)^n+25(-0,75)^n & 24+21(-0,25)^n-45(-0,75)^n & 24-84(-0,25)^n+60(-0,75)^n \\ 32-7(-0,25)^n-25(-0,75)^n & 32-7(-0,25)^n+45(-0,75)^n & 32+28(-0,25)^n-60(-0,75)^n \\ 14-14(-0,25)^n & 14-14(-0,25)^n & 14+56(-0,25)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{24+21(-0,25)^n+25(-0,75)^n}{70}a_0 + \dfrac{24+21(-0,25)^n-45(-0,75)^n}{70}b_0 + \dfrac{24-84(-0,25)^n+60(-0,75)^n}{70}c_0 \\ b_n = \dfrac{32-7(-0,25)^n-25(-0,75)^n}{70}a_0 + \dfrac{32-7(-0,25)^n+45(-0,75)^n}{70}b_0 + \dfrac{32+28(-0,25)^n-60(-0,75)^n}{70}c_0 \\ c_n = \dfrac{14-14(-0,25)^n}{70}a_0 + \dfrac{14-14(-0,25)^n}{70}b_0 + \dfrac{14+56(-0,25)^n}{70}c_0. \end{cases}$$

5 D'après les expressions précédentes, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{12}{35} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{16}{35} \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{5}.$$

IV Formule de Bayes

Exercice 20 : Dans une population, un individu contracte une maladie avec une probabilité égale à 35%. On organise une campagne de vaccination qui touche 45% de la population. Les personnes vaccinées contractent tout de même la maladie avec une probabilité de 1%.

Quelle est la probabilité qu'une personne malade ait été vaccinée ?

Correction : On note V l'événement « la personne est vaccinée » et M l'événement « la personne est malade ».

$$\mathbb{P}_\mathrm{M}(\mathrm{V}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{V})}{\mathbb{P}(\mathrm{M})}\mathbb{P}_\mathrm{M}(\mathrm{V}) = \frac{\frac{45}{100}}{\frac{197}{1000}}\frac{1}{100} \simeq 2,28\%.$$

Exercice 21 : Dans un jeu télévisé, trois portes sont fermées.

Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres, un porte-clé.

Le candidat choisit l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle porte cache la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve un porte-clé.

Il propose alors au candidat de changer de porte. Que doit faire le candidat ?

Correction : Notons P_1, P_2 et P_3 les portes, P_1 celle que le candidat a choisie.

On note V_i l'événement « la voiture est derrière la porte i » et O_i l'événement « le présentateur a ouvert la porte i ».

On a :

- $\mathbb{P}_{V_1}(O_2) = \mathbb{P}_{V_1}(O_3) = \dfrac{1}{2}$,
- $\mathbb{P}_{V_2}(O_2) = \mathbb{P}_{V_3}(O_3) = 0$,
- $\mathbb{P}_{V_3}(O_2) = \mathbb{P}_{V_2}(O_3) = 1$.

Ainsi, la probabilité que la voiture soit derrière la porte 3 sachant que le présentateur a ouvert la porte 2 est

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{O_2}(V_3) &= \frac{\mathbb{P}(V_3)}{\mathbb{P}(O_2)}\mathbb{P}_{V_3}(O_2) = \frac{\mathbb{P}(V_3)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(O_2\cap V_i)}\mathbb{P}_{V_3}(O_2) = \frac{\mathbb{P}(V_3)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(V_i)\mathbb{P}_{V_i}(O_2)}\mathbb{P}_{V_3}(O_2) \\
&= \frac{\mathbb{P}(V_3)}{\mathbb{P}_{V_1}(O_2)\mathbb{P}(V_1) + \cancel{\mathbb{P}_{V_2}(O_2)} + \mathbb{P}(V_2) + \mathbb{P}_{V_3}(O_2)\mathbb{P}(V_3)}\mathbb{P}_{V_3}(O_2) \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \times 1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Il est donc plus favorable que le candidat change son choix.

Exercice 22 : Un système d'alarme fonctionne de la manière suivante :

— s'il y a danger, la probabilité que l'alarme se déclenche est $0,99$;
— s'il n'y a aucun danger, l'alarme se déclenche avec une probabilité de $0,005$;

La probabilité qu'un danger se présente est $0,001$.

L'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

Exercice 23 : Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin qui détecte une pathologie présente chez une personne sur 10 000. Ce test est positif chez 99% des malades et faussement positif $0,1\%$ des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif ; quelle est sa probabilité d'être malade ? Même question avec un résultat négatif.

Exercice 24 : Les pièces fabriquées dans une usine proviennent de deux machines. La machine A produit 1% de pièces défectueuses et la machine B 5%. La production de l'usine provient à 70% de la machine A. On choisit au hasard une pièce produite par l'usine.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On constate que la pièce est défectueuse.

   Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?
3. Même question dans le cas où on constate que la pièce n'est pas défectueuse.

V Indépendance

Exercice 25 : Dans la chorale d'un lycée, il y a 7 élèves de Seconde, 9 élèves de Première et n élèves de Terminale.

De plus, parmi les élèves de Seconde, il n'y a qu'une seule fille, contre 3 parmi les élèves de Première et 6 parmi les élèves de Terminale.

On tire au sort un élève de la chorale.

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n les évènements « l'élève est en Terminale » et « l'élève est une fille » sont indépendants.
2. Pour $n = 24$, que peut-on dire de l'indépendance éventuelle des évènements :
   a. « l'élève est en Terminale » et « l'élève est un garçon » ?
   b. « l'élève est en Première » et « l'élève est une fille » ?

Exercice 26 : On lance deux fois successivement un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Étudier l'indépendance des événements suivants :

1. A : « 3 sort en premier » et B : « 5 sort en second » ;
2. C : « 5 sort en premier » et D : « 5 sort deux fois » ;
3. E : « 1 sort en premier » et F : « 6 sort une fois ».

Exercice 27 : Une population peut être atteinte par deux maladies A et B. Une étude statistique révèle que :

- la probabilité d'être atteint par A est $0,2$, celle d'être atteint par B est $0,3$.
- la probabilité pour une personne n'étant pas atteinte par B de l'être par A est $0,1$.

1. Calculer la probabilité pour une personne atteinte par B de l'être aussi par A.
2. Les maladies A et B frappent-elles indépendamment les individus de la population ?

Index