Probabilités conditionnelles

Exercice 1 : Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.

On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n

Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

Correction : $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.

La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ soit $\ell = \frac{4}{13}$. Donc $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Exercice 2 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction : La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1 - (\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$. On a facilement : $n \geqslant 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1 - (\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geqslant 21$.

Exercice 3 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction :

1. Le taux global de personnes soulagées : $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)P(S/A)/$

Exercice 4 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Correction :

1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $P(CB/YB) = P(YB/CB)P($
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $P(YB/CB) = P(YB \cap CB)/P(CB) = \dfrac{0.15}{0.25} = 0.6$.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $P(\text{non}YB/CB) = 1 - P(YB/CB) = 0.4$.

Exercice 5 : Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

Correction : On obtient par calcul direct ou par événement contraire la probabilité de voler : $1 - p + p(1-q)^2$.

Exercice 6 : On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

— Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
— Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Correction :

1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$ or $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255$.
   D'où : $P(M/T^+) = 22.7\%$.
2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 77.3\%$.
3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $P(M/T^-) = 0.0017$.
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Exercice 7 : Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?

3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Correction : Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a $8\,!$. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

1. Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : BMMMMMMM, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a $7!$ permutations de ce type. Donc $\mathrm{P(A)} = \dfrac{7!}{8!} = \dfrac{1}{8}$, on s'en doutait !
2. De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : MBMMMMMM : il y en a encore $7\,!$, et la probabilité est la même.
3. Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième,..., huitième essai.

Exercice 8 : Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(A)}$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(B)}$ pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(C)}$ pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(D)}$ pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Correction :

1. L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles : il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $\mathrm{P(A)}$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\dfrac{1}{6!}$.
2. André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a $5!$ permutations pour ces derniers : $\mathrm{P(B)} = \dfrac{5!}{6!} = \dfrac{1}{6}$.
3. André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a $4!$ permutations pour ces derniers : $\mathrm{P(C)} = \dfrac{4!}{6!} = \dfrac{1}{30}$.
4. André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements $\mathrm{D_1}$: ‹‹André danse avec son épouse››; $\mathrm{D_2}$: ‹‹René danse avec son épouse››. Alors $\mathrm{D} = \mathrm{D_1} \cup \mathrm{D_2}$ et $\mathrm{P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)} = \dfrac{3}{10}$.

Exercice 9 : Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Correction :

1. Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à ‹‹choisir›› parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons Par exemple :

$$|\bullet\bullet||\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|$$

les gagnants sont : 1; 4; 5; 7; 11; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38(= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\dfrac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.059\,1 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Exercice 10 : Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{G}_n)$. On note $v_n = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}_n})$.

1. Ecrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. À l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n. Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Correction :

1. $u_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}/\mathrm{G}n)\mathrm{P}(\mathrm{G}n) + \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}/\overline{\mathrm{G}_n})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$.

   $v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$.

   Donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

   Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1-u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \dfrac{3}{7}$. Donc $u_n = \dfrac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \dfrac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.

Exercice 11 : On a décelé dans une certaine population une probabilité de 0,01 pour qu'un enfant soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un enfant qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est de 0,9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive au test est de 0,95.
Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard ait une réaction positive au test ? Quelle est la probabilité qu'un enfant pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Correction : On note A l'événement ``l'enfant a la maladie M'', $\mathrm{A}^c$ son complémentaire (événement ``l'enfant n'a pas la maladie M''), B l'événement ``l'enfant a une réaction positive au test'', $\mathrm{B}^c$ son complémentaire (événement ``l'enfant a une réaction négative au test''). D'après l'énoncé, $\mathrm{P(A)} = 0,01$, $\mathrm{P(A}^c) = 0,99$, $\mathrm{P(B}^c|\mathrm{A}^c) = 0,9$ et $\mathrm{P(B|A)} = 0,95$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(B)} &= \mathrm{P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\
&= \mathrm{P(B|A)P(A)} + (1 - \mathrm{P(B^c|A^c)})\mathrm{P(A^c)} = 0,0095 + 0,099 = 0,1085.
\end{aligned}$$

La probabilité qu'un enfant de moins de trois mois pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M est donnée par $\mathrm{P(A|B)} = \dfrac{\mathrm{P(B \cap A)}}{\mathrm{P(B)}} = \dfrac{\mathrm{P(B|A)P(A)}}{\mathrm{P(B)}} = \dfrac{95}{1085} \simeq 0,088$. Un tel test serait d'une utilité discutable.

Exercice 12 : Il y a 5% de daltoniens chez les hommes et 0,25% chez les femmes. Il y a 48% d'hommes et 52% de femmes dans la population. Quelle est la probabilité pour qu'un daltonien soit un homme ?

Remarque : la forme la plus courante du daltonisme est génétique, due à un gène récessif porté par le chromosome X. Un homme (XY) est daltonien dès que le chromosome X porte ce gène. Une femme (XX) n'est daltoniene que si les 2 chromosomes X portent ce gène. Ceci explique les taux très différents chez les hommes et les femmes.

Correction : La méthode la plus simple consiste à introduire la population totale N et à compter les daltoniens. Soit $d_{\mathrm{H}} = 5\%$, $d_{\mathrm{F}} = 0,25\%$ (taux de daltoniens chez les hommes et les femmes), $p_{\mathrm{H}} = 48\%$, $p_{\mathrm{F}} = 52\%$ (proportions d'hommes et de femmes dans la population). Le nombre d'hommes est $\mathrm{N}p_{\mathrm{H}}$, le nombre d'hommes daltoniens est $\mathrm{N}p_{\mathrm{H}}d_{\mathrm{H}}$. De même, le nombre de femmes daltoniennes est $\mathrm{N}p_{\mathrm{F}}d_{\mathrm{F}}$. La proportion de daltoniens hommes parmi les daltoniens est donc

$$\frac{\text{nombre de daltoniens hommes}}{\text{nombre de daltoniens}} = \frac{\mathrm{N}p_{\mathrm{H}}d_{\mathrm{H}}}{\mathrm{N}p_{\mathrm{H}}d_{\mathrm{H}} + \mathrm{N}p_{\mathrm{F}}d_{\mathrm{F}}} = \frac{p_{\mathrm{H}}d_{\mathrm{H}}}{p_{\mathrm{H}}d_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{F}}d_{\mathrm{F}}} \approx 0,95.$$

La probabilité pour qu'un daltonien soit un homme est d'environ 95%.

Une formulation plus élaborée (mais strictement équivalente) consiste à utiliser la formule de Bayes. Soit H l'événement ``être un homme'' et D l'événement ``être daltonien''. On veut calculer P(H|D). Selon la formule de Bayes, $\mathrm{P(H|D)} = \dfrac{\mathrm{P(D|H)P(H)}}{\mathrm{P(D)}}$. En utilisant que $\mathrm{P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)}$ (formule des probabilités totales), on obtient

$$\mathrm{P(H|D)} = \frac{\mathrm{P(D|H)P(H)}}{\mathrm{P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)}} = \frac{p_{\mathrm{H}}d_{\mathrm{H}}}{p_{\mathrm{H}}d_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{F}}d_{\mathrm{F}}}.$$

Exercice 13 : Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Correction : Soit $\mathrm{U_1}$ l'événement ``on tire la boule dans la première urne'' et $\mathrm{U_2}$ l'événement ``on tire la boule dans la seconde urne''. Le choix de l'urne étant équiprobable, on a : $\mathrm{P(U_1) = P(U_2)} = 0,5$. Soit B l'événement ``on tire une boule blanche''. L'énoncé donne les probabilités conditionnelles suivantes :
$\mathrm{P(B|U_1)} = 30/40 = 0,75$ et $\mathrm{P(B|U_2)} = 20/40 = 0,5$.
On cherche la probabilité $\mathrm{P(U_1|B)}$. La formule de Bayes, appliquée à la partition $(\mathrm{H_1}, \mathrm{H_2})$, nous donne :

$$\mathrm{P(U_1|B)} = \frac{\mathrm{P(B|U_1)P(U_1)}}{\mathrm{P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2)}} = \frac{0,75 \times 0,5}{0,75 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5} = 0,6$$

(probabilité a posteriori)

Interprétation : avant de regarder la couleur de la boule, la probabilité d'avoir choisi la première urne est une probabilité a priori $\mathrm{P(U_1)}$ soit 50 %. Après avoir regardé la boule, on révise notre jugement et on considère $\mathrm{P(U_1|B)}$, soit 60 %.

Index