Intégration

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 26

Sommaire I

Ce nouveau chapitre sur l'intégration doit être considéré comme l'unique chapitre sur celle-ci. Le précédent ne s'était concentré que sur la pratique en effleurant à peine la théorie : comment est définie la notion d'intégrale ? Pourquoi ? Quelles sont ses propriétés ?

Nous comblerons ce manque en présentant la construction de l'intégrale de Riemann, qui permet notamment de justifier les calculs d'intégrales de fonctions continues [1]. Théorème connu sous le nom de théorème fondamental de l'analyse..

Cette construction permettra également de voir une intégrale comme limite d'une somme, ouvrant la voie à l'approximation des intégrales dans le cas où on ne sait pas exprimer les primitives et à de nombreux exercices de limites de sommes.

Nous reverrons également également la formule de Taylor mais sous sa forme dite intégrale, résultat qui aura l'avantage d'être global au contraire de la formule de Taylor-Young qui était locale.

[1]. On peut faire mieux avec d'autres théories, mais c'est complètement superflu pour nous.

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, on considère deux réels a et b tels que $a < b$.

L'intervalle $[a\,;b]$ est donc non trivial.

Définition 1 :

On appelle subdivision du segment $[a\,;b]$ toute suite finie de réels $s = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Le pas de la subdivision est l'écart maximum entre deux termes :

$$\max_{k \in [\![0, n-1]\!]} (a_{k+1} - a_k).$$

L'image de la subdivision est l'ensemble $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$.

Définition 1 :

On appelle subdivision du segment $[a\,;b]$ toute suite finie de réels $s=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ telle que

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b.$$

Le pas de la subdivision est l'écart maximum entre deux termes :

$$\max_{k\in[\![0,n-1]\!]}(a_{k+1}-a_k).$$

L'image de la subdivision est l'ensemble $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$.

Remarques :

- Si s est une subdivision de l'intervalle $[a\,;b]$ alors s contient les réels a et b.

Définition 1 :

On appelle subdivision du segment $[a\,;b]$ toute suite finie de réels $s=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ telle que

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b.$$

Le pas de la subdivision est l'écart maximum entre deux termes :

$$\max_{k\in[\![0,n-1]\!]}(a_{k+1}-a_k).$$

L'image de la subdivision est l'ensemble $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$.

Remarques :

- Si s est une subdivision de l'intervalle $[a\,;b]$ alors s contient les réels a et b.
- Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on dit que s_1 est plus fine que s_2, noté $s_2<s_1$, si s_1 contient au moins tous les termes de la subdivision s_2.

I. Fonctions en escalier

1. Subdivision

Définition 1 :

On appelle subdivision du segment $[a\,;b]$ toute suite finie de réels $s = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Le pas de la subdivision est l'écart maximum entre deux termes :

$$\max_{k \in [\![0, n-1]\!]} (a_{k+1} - a_k).$$

L'image de la subdivision est l'ensemble $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$.

Remarques :

- Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on dit que s_1 est plus fine que s_2, noté $s_2 < s_1$, si s_1 contient au moins tous les termes de la subdivision s_2.
- Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on peut définir la subdivision réunion de s_1 et s_2, notée $s_1 \vee s_2$, comme la subdivision de $[a\,;b]$ contenant tous les termes des subdivisions de s_1 et s_2.
  On remarquera qu'elle est plus fine que s_1 ET s_2.

Définition 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle subdivision régulière de $[a\,;b]$, la subdivision $s = (a_1, \dots, a_n)$ définie par :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]\,,\ a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

Définition 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle subdivision régulière de $[a\,;b]$, la subdivision $s = (a_1, \dots, a_n)$ définie par :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]\,,\ a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

En particulier, pour une subdivision régulière, $\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]$,

$$a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}.$$

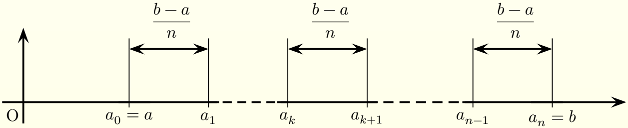


Figure 1 – Subdivision régulière d'un intervalle $[a\,;b]$

Définition 3 :

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$.

- On dit que f est en escalier lorsqu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$:

$$\exists\, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \ \text{ tels que } \ f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, \mathbb{1}_{]a_k;a_{k+1}[}.$$

On note $\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$ leur ensemble.

Définition 3 :

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$.

- On dit que f est en escalier lorsqu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$:

$$\exists\, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ tels que } f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, \mathbb{1}_{]a_k;a_{k+1}[}.$$

  On note $\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$ leur ensemble.

- On dit alors que la subdivision est adaptée à f.

Définition 3 :

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$.

- On dit que f est en escalier lorsqu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$:

$$\exists\, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ tels que } f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \, \mathbb{1}_{]a_k;a_{k+1}[}.$$

  On note $\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.

- On dit alors que la subdivision est adaptée à f.

Toute fonction en escalier f vient donc avec au moins une subdivision adaptée à f.

Remarques :

- On parle aussi de fonction constante par morceaux.

Remarques :

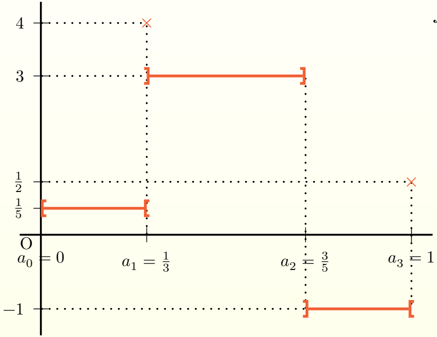
- On parle aussi de fonction constante par morceaux.
- **Aucune** condition n'est imposée aux valeurs de $f(a_k)$ mais une subdivision adaptée contient nécessairement tous les points de discontinuité de f.

Remarques :

- On parle aussi de fonction constante par morceaux.
- **Aucune** condition n'est imposée aux valeurs de $f(a_k)$ mais une subdivision adaptée contient nécessairement tous les points de discontinuité de f.
- Une fonction en escalier est bornée.
  En effet, elle prend un nombre fini de valeurs.
  Une fonction prenant un nombre fini de valeurs est-elle nécessairement en escalier ?

Remarques :

- On parle aussi de fonction constante par morceaux.
- **Aucune** condition n'est imposée aux valeurs de $f(a_k)$ mais une subdivision adaptée contient nécessairement tous les points de discontinuité de f.
- Une fonction en escalier est bornée.
  En effet, elle prend un nombre fini de valeurs.
  Une fonction prenant un nombre fini de valeurs est-elle nécessairement en escalier ?
- Il existe une infinité de subdivisions adaptées à une fonction en escalier : il suffit d'intercaler des termes à la suite.



$$
\begin{array}{rccl}
f: & [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{5} & \text{si} \quad x \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right[\\ 4 & \text{si} \quad x = \dfrac{1}{3} \\ 3 & \text{si} \quad x \in \left]\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{3}{5}\right] \\ -1 & \text{si} \quad x \in \left]\dfrac{3}{5}\,;1\right[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}
\end{array}
$$

Figure 2 – Exemple de fonction en escalier sur $[0\,;1]$.

Exemples 1 :

- Une fonction constante est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à toute subdivision de $[a\,;b]$.

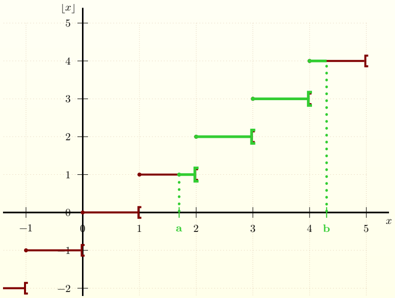


Figure 3 – La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a\,;b]$.

Exemples 1 :

- Une fonction constante est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à toute subdivision de $[a\,;b]$.
- La fonction partie entière est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à la subdivision de $[a\,;b]$ constituée de a, b et de tous les entiers du segment $[a\,;b]$.

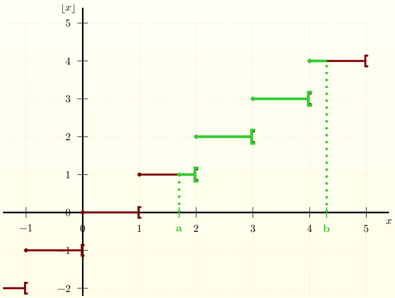


Figure 3 – La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a\,;b]$.

Proposition 1 :

Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.

Proposition 1 :

Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.

Intéressons nous un instant à la structure de $\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

Proposition 2 :

Soient f, et g en escalier sur $[a\,;b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $f+g$, αf, fg, et $|f|$ sont en escalier sur $[a\,;b]$.

Proposition 1 :

Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.

Intéressons nous un instant à la structure de $\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

Proposition 2 :

Soient f, et g en escalier sur $[a\,;b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $f+g$, αf, fg, et $|f|$ sont en escalier sur $[a\,;b]$.

La fonction nulle étant également une fonction en escalier sur tout intervalle $[a\,;b]$, on en déduit :

Corollaire 1 :

L'ensemble $\left(\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})\,;+_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\,;\cdot_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\right)$ est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

Définition/Théorème 4 :

Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ une fonction en escalier sur $[a\,;b]$ et $s\,:\, a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note λ_k la valeur prise par f sur $]a_k, a_{k+1}[$.

On définit :

$$\mathrm{I}_s(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\lambda_k.$$

Alors, $\mathrm{I}_s(f)$ est indépendant du choix de la subdivision s adaptée à f.

On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre $\mathrm{I}_s(f)$:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\lambda_k.$$

Exemple 2 :

Si la fonction f est constante et prend la valeur λ sur $[a\,;b]$, son intégrale est $\displaystyle\int_{[a;b]} f = (b-a)\lambda$. C'est l'aire algébrique du rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ.

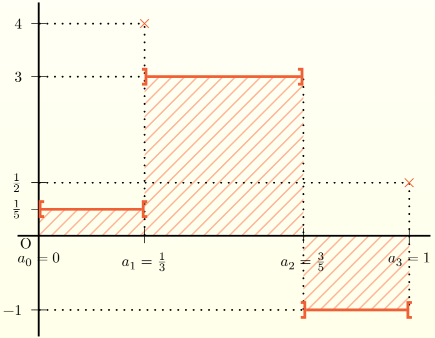


Figure 4 – Exemple d'intégrale d'une fonction en escalier avec la fonction de la figure 2.

Remarques :

- La valeur de f en chaque a_k n'intervient pas.

Remarques :

- La valeur de f en chaque a_k n'intervient pas.
- Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $(a_{k+1}-a_k)\lambda_k$ est l'aire « algébrique » du rectangle de base $a_{k+1}-a_k>0$ et de hauteur λ_k.
  Cette aire est négative ou positive suivant le signe de λ_k.

Remarques :

- La valeur de f en chaque a_k n'intervient pas.
- Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $(a_{k+1}-a_k)\lambda_k$ est l'aire « algébrique » du rectangle de base $a_{k+1}-a_k > 0$ et de hauteur λ_k.
  Cette aire est négative ou positive suivant le signe de λ_k.
- L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est la somme des aires algébriques des rectangles formés par la fonction en escalier avec l'axe des abscisses.
  On retrouve le fait que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ correspond à l'aire algébrique du domaine compris entre $(\mathrm{O}x)$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation : $x=a$ et $x=b$.

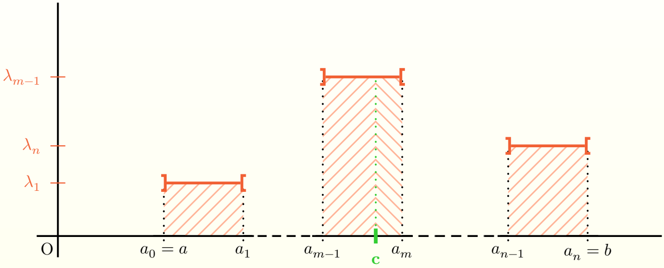


Figure 5 – L'intégrale de f est inchangée sur une subdivision plus fine.

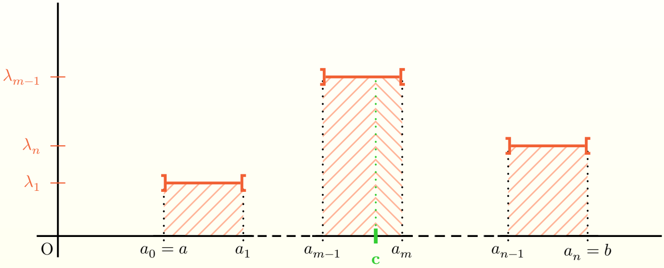


Figure 5 – L'intégrale de f est inchangée sur une subdivision plus fine.

Exemple 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{[0;n]} \lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Proposition 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Linéarité : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right),\, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Linéarité : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Relation de Chasles : $\forall\, f \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right),\ \forall\, c \in \,]a\,;b[.$

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Positivité : $\forall\, f \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$.

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,, f(x) \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

En particulier,

Proposition 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Positivité : $\forall\, f \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$.

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,, f(x) \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

En particulier,

Croissance : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$, $\forall\, x \in [a\,;b]$,

$$f(x) \geqslant g(x) \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

est **croissante**.

Proposition 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Inégalité triangulaire : $\forall f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

$$\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Inégalité triangulaire : $\forall f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

$$\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

est donc une forme linéaire.

Théorème 4 ($\mathcal{E}([a\,;b]) \to \mathcal{C}^0([a\,;b])$ - Admis) :

$\forall\, f \in \mathcal{C}^0\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right), \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}),$

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Théorème 4 ($\mathcal{E}([a\,;b]) \to \mathcal{C}^0([a\,;b])$ - Admis) :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}^0\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right), \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}),$$

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Les inégalités de (1) sont des inégalités fonctionnelles qui se lisent :

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,,\ \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon.$$

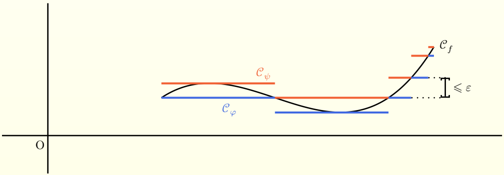


Figure 6 – Approximation d'une fonction continue par deux fonctions en escalier.

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
Notons :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad \Big(0 \leqslant y \leqslant f(x) \text{ ou } f(x) \leqslant y \leqslant 0\Big) \right\}.$$

Si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ alors les nombres $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \psi$ donnent intuitivement des approximations par défaut et excès de l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$.

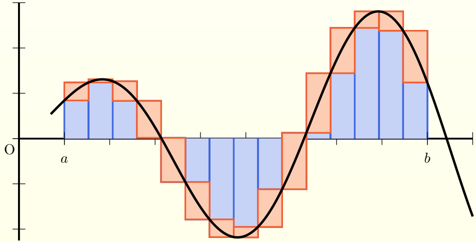


Figure 7 – Encadrement $\displaystyle\int_{[a\,;b]} \varphi \leqslant \int_{[a\,;b]} f \leqslant \int_{[a\,;b]} \psi$.

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

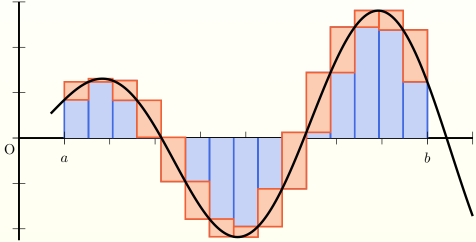


Figure 7 – Encadrement $\displaystyle\int_{[a\,;b]} \varphi \leqslant \int_{[a\,;b]} f \leqslant \int_{[a\,;b]} \psi$.

Pour définir l'aire de $\mathcal{D}$, on est ainsi conduit à introduire les ensembles suivants :

$$\mathcal{E}^{+}_{[a;b]}(f) = \Big\{\psi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, f \leqslant \psi\Big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f) = \Big\{\varphi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, \varphi \leqslant f\Big\}.$$

Ensembles des fonctions en escaliers sur $[a\,;b]$ qui majorent et minorent f sur $[a\,;b]$.

Théorème 5 :

Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :

- $\mathrm{I}^-_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure $\mathcal{J}$.

Théorème 5 :

Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :

- $\mathrm{I}^-_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure $\mathcal{J}$.
- $\mathrm{I}^+_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne inférieure $\mathcal{J}$.

Théorème 5 :

Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :

- $\mathrm{I}^{-}_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure $\mathcal{I}$.
- $\mathrm{I}^{+}_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^{+}_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne inférieure $\mathcal{J}$.

De plus, $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

Définition 5 :

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre réel défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^{+}_{[a;b]}(f)\right\}.$$

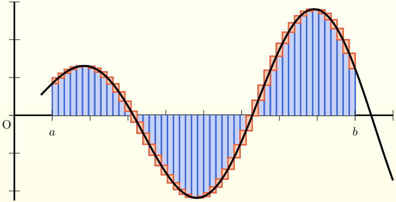


Figure 8 – Pour f continue sur $[a\,;b]$,

$$\int_{[a;b]} f = \sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^{+}_{[a;b]}(f)\right\}.$$

Interprétation géométrique : $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$ du plan situé entre le graphe de f, l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe $(\mathrm{O}x)$, négativement en dessous) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

- Les fonctions pour lesquelles $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]} = \inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ sont dites intégrables au sens de Riemann [2] sur $[a\,;b]$ ou Riemann-intégrables.

Interprétation géométrique : $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$ du plan situé entre le graphe de f, l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe $(\mathrm{O}x)$, négativement en dessous) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

- Les fonctions pour lesquelles $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]} = \inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ sont dites intégrables au sens de Riemann [2] sur $[a\,;b]$ ou Riemann-intégrables.
- Pour toute fonction continue f sur $[a\,;b]$ et toute subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a\,;b]$, on peut poser :

$$\mathrm{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x).$$

On appelle alors sommes de Darboux inférieure $\mathrm{L}_{f,\sigma}$ et supérieure $\mathrm{U}_{f,\sigma}$ de f selon σ, les réels :

$$\mathrm{L}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mathrm{M}_i.$$

Par construction, $\mathrm{L}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^-_{f,[a;b]}$ et $\mathrm{U}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^+_{f,[a;b]}$.

Interprétation géométrique : $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$ du plan situé entre le graphe de f, l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe $(\mathrm{O}x)$, négativement en dessous) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

- Les fonctions pour lesquelles $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]} = \inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ sont dites intégrables au sens de Riemann [2] sur $[a\,;b]$ ou Riemann-intégrables.
- Pour toute fonction continue f sur $[a\,;b]$ et toute subdivision $\sigma :\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a\,;b]$, on peut poser :

$$\mathrm{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x).$$

On appelle alors sommes de Darboux inférieure $\mathrm{L}_{f,\sigma}$ et supérieure $\mathrm{U}_{f,\sigma}$ de f selon σ, les réels :

$$\mathrm{L}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mathrm{M}_i.$$

Par construction, $\mathrm{L}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^-_{f,[a;b]}$ et $\mathrm{U}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^+_{f,[a;b]}$.

- Ce théorème prouve que les que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann.

Remarques :

- Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann non continues, par exemple les fonctions en escalier.

Remarques :

- Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann non continues, par exemple les fonctions en escalier.
- Il existe des fonctions non intégrables au sens de Riemann. Par exemple, l'indicatrice de $\mathbb{Q}$,

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

  est non intégrable car ses sommes de Darboux inférieures et supérieures seraient nécessairement respectivement égales à 0 et 1.

Remarques :

- Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann non continues, par exemple les fonctions en escalier.
- Il existe des fonctions non intégrables au sens de Riemann. Par exemple, l'indicatrice de $\mathbb{Q}$,

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

  est non intégrable car ses sommes de Darboux inférieures et supérieures seraient nécessairement respectivement égales à 0 et 1.
- Si f est une fonction en escalier, $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ se trouve à la fois dans $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et dans $\mathrm{I}^+_{[a;b]}$.

  Donc la valeur commune de $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et $\inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ n'est autre que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

  Les deux définitions de l'intégrale (pour une fonction en escalier, et pour une fonction continue) sont cohérentes.

Méthode 1 :

Pour justifier l'existence d'une intégrale, il suffit donc de dire c'est celle d'une fonction en escalier, ou d'une fonction continue sur un segment, ou se prolonge par continuité sur un segment.

Méthode 1 :

Pour justifier l'existence d'une intégrale, il suffit donc de dire c'est celle d'une fonction en escalier, ou d'une fonction continue sur un segment, ou se prolonge par continuité sur un segment.

Exemple 4 :

L'écriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ a un sens mais $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ n'en a pas (cette année...).

Proposition 6 (Linéarité) :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\int_{[a;b]} \alpha f + g = \alpha \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$$

Proposition 6 (Linéarité) :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\int_{[a;b]} \alpha f + g = \alpha \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$$

Remarque : L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f \end{array}$ est désormais aussi une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

Proposition 7 (Relation de Chasles) :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $c \in [a\,;b]$.

Alors :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Proposition 7 (Relation de Chasles) :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $c \in [a\,;b]$.

Alors :
$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Notations : Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$).

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. On définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f$ si $a < b$.

Proposition 7 (Relation de Chasles) :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $c \in [a\,;b]$.

Alors :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Notations : Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$).

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. On définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f$ si $a < b$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[b;a]} f$ si $a > b$.

Proposition 7 (Relation de Chasles) :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $c \in [a\,;b]$.

Alors :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Notations : Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$).

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. On définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f$ si $a < b$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[b;a]} f$ si $a > b$.

La relation de Chasles et la linéarité sont alors vraies pour a, b et c quelconques.

Corollaire 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b])$.

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Proposition 8 (Relation d'ordre) :

Positivité de l'intégrale : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0. \tag{2}$$

Proposition 8 (Relation d'ordre) :

Positivité de l'intégrale : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0. \tag{2}$$

Croissance de l'intégrale : Soient f, $g \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g.$$

Proposition 8 (Relation d'ordre) :

Positivité de l'intégrale : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0. \tag{2}$$

Croissance de l'intégrale : Soient f, $g \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g.$$

Inégalité triangulaire : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|\,.$$

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On considère $\mathrm{P}(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le signe de $\mathrm{P}(\lambda)$.

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On considère $\mathrm{P}(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le signe de $\mathrm{P}(\lambda)$.
2. En déduire que $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\displaystyle\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Peut-on offrir une réciproque à l'implication (2) ? La réponse est oui mais à une condition.

Peut-on offrir une réciproque à l'implication (2) ? La réponse est oui mais à une condition.

Théorème 9 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}_+)$ une fonction continue à valeurs **positives**.

$$\int_{[a;b]} f = 0 \iff f = 0_{\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R}_+)}.$$

Peut-on offrir une réciproque à l'implication (2) ? La réponse est oui mais à une condition.

Théorème 9 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}_+)$ une fonction continue à valeurs **positives**.

$$\int_{[a;b]} f = 0 \iff f = 0_{\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R}_+)}.$$

ATTENTION

Faux pour les fonctions non positives comme sin sur $[0, 2\pi]$ ou non continues comme

$$\begin{array}{rccl} \delta_0 : & [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (Prélude à l'année prochaine) :

Montrer que l'application $\cdot \mid \cdot$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \cdot \mid \cdot : & \mathcal{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f\,;g) & \longmapsto & f \mid g = \displaystyle\int_{[a;b]} fg \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Proposition 10 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$m \leqslant f \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \mathrm{M}(b-a). \tag{3}$$

Proposition 10 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$m \leqslant f \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \mathrm{M}(b-a). \tag{3}$$

D'un point de vue graphique, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur.

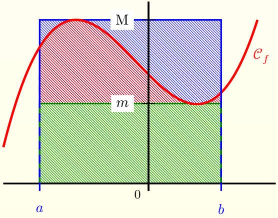


Figure 9 – Inégalité de la moyenne.

Remarque : L'inégalité des accroissements finis nous donnait un résultat similaire pour une fonction dérivable sous la forme :

$$m \leqslant f' \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Remarque : L'inégalité des accroissements finis nous donnait un résultat similaire pour une fonction dérivable sous la forme :

$$m \leqslant f' \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

En permettant d'écrire $\displaystyle\int_{[a;b]} f' = f(b) - f(a)$, le *Théorème Fondamental de l'analyse* fera bientôt le lien entre ces deux résultats.

Pourquoi se contenter d'une faible inégalité alors qu'on pourrait avoir une égalité ?

Théorème 11 (Valeur moyenne d'une fonction) :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b])$.

Alors il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c). \tag{4}$$

Le nombre $\mu = f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors appelé la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$.

Remarques :

- Pourquoi ce nom du théorème ?

Remarques :

- Pourquoi ce nom du théorème ? Comment calculerions-nous la valeur moyenne, notée par exemple $\overline{f}$, d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$?

Remarques :

- Pourquoi ce nom du théorème ? Comment calculerions-nous la valeur moyenne, notée par exemple $\overline{f}$, d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$?

  Tout simplement, en sommant toutes les valeurs de f prises sur l'intervalle $[a\,;b]$ divisées par toutes les valeurs de ce même intervalle.
  Ce qui s'écrirait :

$$\overline{f} = \frac{\text{Somme de toutes les valeurs de } f(x) \text{ sur l'intervalle } [a\,;b]}{\text{Toutes les valeurs de l'intervalle } [a\,;b]} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

Remarques :

- La valeur moyenne est la constante qui vérifie $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mu$. C'est la valeur que devrait prendre f si elle était constante, pour que l'intégrale soit inchangée :

$$\underbrace{\mu(b-a)}_{\text{aire du rectangle}} = \underbrace{\int_{[a;b]} f}_{\text{aire sous la courbe}}.$$

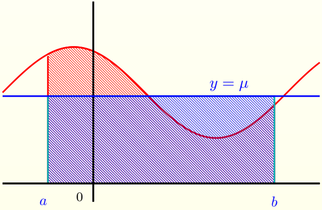


Figure 10 – Le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du rectangle bleu dont les côtés ont pour mesures $b-a$ et μ.

Remarques :

- D'un point du vue cinématique la valeur moyenne de la vitesse d'un mobile [3] mesurée entre deux temps t_1 et t_2 s'écrit :

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1} \Big[x(t)\Big]_{t_1}^{t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$
$$= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \text{vitesse moyenne.}$$

La valeur moyenne de la vitesse d'un mobile est donc sa vitesse moyenne !

[3]. La vitesse instantanée est la dérivée de la position $x(t)$.

Commentaires : Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a\,;b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la sommes des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles.

Commentaires : Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a\,;b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la sommes des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles.

La construction de l'intégrale que nous avons donnée fonctionne d'ailleurs pour une classe de fonctions plus large que les fonctions continues, qu'on appelle fonctions réglées (mais que nous n'étudierons pas cette année).

Commentaires : Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a\,;b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la sommes des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles.

La construction de l'intégrale que nous avons donnée fonctionne d'ailleurs pour une classe de fonctions plus large que les fonctions continues, qu'on appelle fonctions réglées (mais que nous n'étudierons pas cette année).

Il existe d'autres façons de définir rigoureusement l'intégrale, celle que nous avons étudiée est l'intégrale de Riemann, et il existe notamment une intégrale de Lebesgue qui permet de définir l'intégrale sur une classe de fonctions encore nettement plus large, appelées fonctions mesurables.

Commentaires : Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a\,;b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la sommes des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles.

La construction de l'intégrale que nous avons donnée fonctionne d'ailleurs pour une classe de fonctions plus large que les fonctions continues, qu'on appelle fonctions réglées (mais que nous n'étudierons pas cette année).

Il existe d'autres façons de définir rigoureusement l'intégrale, celle que nous avons étudiée est l'intégrale de Riemann, et il existe notamment une intégrale de Lebesgue qui permet de définir l'intégrale sur une classe de fonctions encore nettement plus large, appelées fonctions mesurables.

Bref, même si ça ne vous saute pas aux yeux, nous avons fait au plus simple !

IV. Intégration et Dérivation

1. Théorème Fondamental de l'analyse

Théorème 12 (Théorème Fondamental de l'analyse) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Théorème 12 (Théorème Fondamental de l'analyse) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Ce théorème est un théorème d'EXISTENCE de primitives pour les fonctions CONTINUES.

En outre, la fonction f étant continue, sa primitive $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est mieux que dérivable, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 12 (Théorème Fondamental de l'analyse) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Ce théorème est un théorème d'EXISTENCE de primitives pour les fonctions CONTINUES.

En outre, la fonction f étant continue, sa primitive $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est mieux que dérivable, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Fondamental, ce théorème l'est parce qu'il établit un lien entre deux couples de notions apparemment totalement étrangères - le couple aire/intégrale et le couple primitive/dérivée que nous préciserons avec le théorème (13).

Corollaire 3 :

Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Corollaire 3 :

Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

- La primitive d'une fonction continue est de classe $\mathcal{C}^1$ par définition.

Corollaire 3 :

Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

- La primitive d'une fonction continue est de classe $\mathcal{C}^1$ par définition.
- Le théorème ne s'applique pas aux fonctions discontinues. Par exemple, la fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $[0, 2]$.

Corollaire 3 :

Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

- La primitive d'une fonction continue est de classe $\mathcal{C}^1$ par définition.
- Le théorème ne s'applique pas aux fonctions discontinues. Par exemple, la fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $[0, 2]$.

ATTENTION

Cela ne contredit en rien le fait que la fonction partie entière soit intégrable. Le théorème fondamental donne juste une condition suffisante d'existence d'une primitive. Cette condition n'est même pas nécessaire vue la remarque suivante.

Corollaire 3 :

Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

- Il existe toutefois des fonctions non continues ayant des primitives.

Corollaire 3 :

Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

- Il existe toutefois des fonctions non continues ayant des primitives.

Exemple 5 :

La fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

dont la dérivée $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ n'est pas continue

(en 0).

La fonction g admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ sans y être continue.

Théorème 13 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in \mathrm{I}$.

Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Théorème 13 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in \mathrm{I}$.

Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Notation : On note $= \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b$ la quantité $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Ainsi,
$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).}$$

Théorème 13 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in \mathrm{I}$.

Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Notation : On note $= \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b$ la quantité $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Ainsi,

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).}$$

Exemple 6 :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Corollaire 4 :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Exercice 4 :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4 :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

Théorème 14 :

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soient $a, b, \in$ I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

IV. Intégration et Dérivation

3. Intégration par parties

Théorème 14 :

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soient $a, b, \in \mathrm{I}$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 7 :

$$\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\arctan(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 5 :

Soient $x > 1$ et $\mathrm{F}_n(x) = \displaystyle\int_1^x \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{F}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{F}_n(x)$.

Exercice 5 :

Soient $x > 1$ et $\mathrm{F}_n(x) = \displaystyle\int_1^x \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{F}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{F}_n(x)$.
2. En déduire la valeur de $\mathrm{F}_n(x)$.

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Alors,
$$\int_a^b \phi'(t) f(\phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Alors,
$$\int_a^b \phi'(t) f(\phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode 2 :

1. On dit qu'on pose $x = \phi(t)$, et on vérifie que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Alors,
$$\int_a^b \phi'(t) f(\phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode 2 :

1. On dit qu'on pose $x = \phi(t)$, et on vérifie que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. On a $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Alors,
$$\int_a^b \phi'(t) f(\phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode 2 :

1. On dit qu'on pose $x = \phi(t)$, et on vérifie que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. On a $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On n'oublie pas de changer les bornes : lorsque t varie de a à b, x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

Théorème 15 :

Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Alors,
$$\int_a^b \phi'(t) f(\phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode 2 :

1. On dit qu'on pose $x = \phi(t)$, et on vérifie que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. On a $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On n'oublie pas de changer les bornes : lorsque t varie de a à b, x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

$$\int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{f(x)}\,\underbrace{\phi'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 8 :

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

La fonction f est une fraction rationnelle ne possédant pas de pôles réels donc bien définie et au moins continue sur $[0\,;1]$.

Exemple 8 :

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

La fonction f est une fraction rationnelle ne possédant pas de pôles réels donc bien définie et au moins continue sur $[0\,;1]$.

Une mise sous forme canonique du dénominateur $1+x+x^2 = \dfrac{3}{4} + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ encourage à effectuer le changement de variables

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Exemple 8 :

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

La fonction f est une fraction rationnelle ne possédant pas de pôles réels donc bien définie et au moins continue sur $[0\,;1]$.

Une mise sous forme canonique du dénominateur $1+x+x^2 = \dfrac{3}{4} + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ encourage à effectuer le changement de variables

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}.$$

1. Posons $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$.

   Lorsque $x \in [0\,;1]$, $t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.

   Le changement de variable $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$ est fonction affine de t donc clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.

Exemple 8 :

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$.

1. Posons $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$.

   Lorsque $x \in [0\,;1]$, $t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.

   Le changement de variable $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$ est fonction affine de t donc clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.

2. $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 8 :

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$.

1. Posons $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$.
2. $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$.
3. D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}$

$$= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

À l'aide de la formule de changement de variable, on peut prouver de façon rigoureuse les résultats suivants, qui sont géométriquement évidents.

Corollaire 5 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :

Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur l'intervalle considéré.

1. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

À l'aide de la formule de changement de variable, on peut prouver de façon rigoureuse les résultats suivants, qui sont géométriquement évidents.

Corollaire 5 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :

Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur l'intervalle considéré.

1. Si $f : [-a\,; a] \longmapsto \mathbb{R}$ est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $f : [-a\,; a] \longmapsto \mathbb{R}$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

À l'aide de la formule de changement de variable, on peut prouver de façon rigoureuse les résultats suivants, qui sont géométriquement évidents.

Corollaire 5 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :

Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur l'intervalle considéré.

1. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et T-périodique $(\mathrm{T} > 0)$ alors pour tous réels a, b on a :

$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Théorème 16 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Théorème 16 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque : Pour $n = 0$, on retrouve le théorèmes des accroissements finis.

Corollaire 6 (Inégalité de Taylor-Lagrange) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a la majoration :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \text{ avec } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x\in[a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Corollaire 6 (Inégalité de Taylor-Lagrange) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a la majoration :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \text{ avec } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Ce résultat est moins fin que celui du théorème (16) mais souvent suffisant et plus pratique.

Corollaire 6 (Inégalité de Taylor-Lagrange) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a la majoration :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \text{ avec } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Ce résultat est moins fin que celui du théorème (16) mais souvent suffisant et plus pratique.

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a\,;b]$, il exprime notamment que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}\left((b-a)^{n+1}\right).$$

C'est bien mais c'est moins fin que le corollaire corollaire (7) .

V. Formules de Taylor

1. Théorème de Taylor-Lagrange

Corollaire 6 (Inégalité de Taylor-Lagrange) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a la majoration :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \text{ avec } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Ce résultat est moins fin que celui du théorème (16) mais souvent suffisant et plus pratique.

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a\,;b]$, il exprime notamment que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}\left((b-a)^{n+1}\right).$$

C'est bien mais c'est moins fin que le corollaire corollaire (7) .

Remarque : Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, sa dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ est donc continue sur l'intervalle compact $[a\,;b]$. Elle y est donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes et la définition de M_{n+1} y est donc légitime.

Exemple 9 :

$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \longmapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \longmapsto z^n \exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \left| z^{n+1} \exp(zx) \right|.$$

En notant $z = a + \mathrm{i}\,b$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leqslant \exp(|a|)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où le résultat.

Exercice 7 :

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $\mathrm{M} = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a,b]\}$.

Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{4}$.

Théorème 17 (Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 17 (Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formule de Taylor avec reste intégral, est la seule formule de Taylor à donner une expression précise du reste. Elle est très utile lorsqu'on s'intéresse à la régularité de ce dernier comme on le verra plus loin.

Théorème 17 (Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formule de Taylor avec reste intégral, est la seule formule de Taylor à donner une expression précise du reste. Elle est très utile lorsqu'on s'intéresse à la régularité de ce dernier comme on le verra plus loin.

Le théorème (17) permet de redémontrer très facilement l'inégalité du corollaire (6) .

Exemple 10 (Une application aux inégalités) :

Montrons que :

$$\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au sinus (clairement de classe $\mathcal{C}^5$) à l'ordre 4 entre 0 et un x quelconque de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^5}{120}$.

Donc, $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Exemple 10 (Une application aux inégalités) :

Montrons que :

$$\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ x-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au sinus (clairement de classe $\mathcal{C}^5$) à l'ordre 4 entre 0 et un x quelconque de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^5}{120}$.

Donc, $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $x-\dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$.

Exercice 8 :

Montrer que pour tout $\geqslant 0$, $\quad x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

Exemple 11 (Une application aux suites) :

La fonction exp est clairement de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Appliquée à l'ordre n sur l'intervalle $[0\,;1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Corollaire 7 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

Corollaire 7 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

C'est grâce à cette formule qu'on avait obtenu les développements limités des fonctions exp, cos, sin et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ notamment.

Commentaires :

- Cette démonstration utilise le théorème (17). Ipso facto, Hors-Programme.

Corollaire 7 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

C'est grâce à cette formule qu'on avait obtenu les développements limités des fonctions exp, cos, sin et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ notamment.

Commentaires :

- Cette démonstration utilise le théorème (17). Ipso facto, Hors-Programme.
- On pouvait aussi utiliser l'expression du théorème (16) pour obtenir le même résultat avec moins d'efforts certes mais réclamant une fonction de classe supérieure.
  Le corollaire (7) est donc plus « fort » que ce que nous aurions obtenu ainsi.

À retenir :

- Contrairement au développement limité au voisinage de a où le reste n'est négligeable que localement dans le corollaire (7) , la majoration du corollaire (6) est globale : elle est valide pour tous a, x d'un intervalle où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et donne une majoration explicite du reste.

À retenir :

- Contrairement au développement limité au voisinage de a où le reste n'est négligeable que localement dans le corollaire (7) , la majoration du corollaire (6) est globale : elle est valide pour tous a, x d'un intervalle où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et donne une majoration explicite du reste.
- L'expression explicite du reste sous la forme d'une intégrale est donnée par le théorème (17).

VI. Sommes de Riemann

Dans la première partie de ce chapitre ainsi que dans nos incursions précédentes dans le domaine de l'intégration, nous nous sommes uniquement intéressés au calcul exact d'intégrales, qui constituera de toute façon la totalité des questions que vous pourrez avoir sur le sujet à vos écrits de concours.

Mais si vous demandez à votre calculatrice préférée (en supposant qu'elle n'est pas trop calée en calcul formel) de vous donner la valeur d'une intégrale, elle va procéder de façon bien différente.

Les méthodes d'intégration numérique ont pour but de créer des suites $\Big(\mathrm{S}_n(f)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ approchant la valeur d'une intégrale donnée, en maîtrisant l'erreur commise (si on ne connait pas l'erreur, le calcul ne sert à rien), et de préférence avec le moins de calculs possibles.

Nous allons en présenter trois, premières de toute une série de méthodes qui vous verrez assurément au cours de votre séjour en CPGE.

Théorème 18 :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$).

Alors
$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à f sur $[a\,;b]$.

Théorème 18 :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors
$$\mathrm{S}_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à f sur $[a\,;b]$.

Pour être plus précis, la somme $\mathrm{S}_n(f)$ est appelée somme de Riemann à pas constant. On peut, bien évidemment, définir des sommes de Riemann de pas non constant. Dans ce cas, la valeur du pas est le plus grand écart entre deux valeurs successives de la subdivision, comme pour les fonctions en escalier.

Théorème 18 :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors
$$\mathrm{S}_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à f sur $[a\,;b]$.

Pour être plus précis, la somme $\mathrm{S}_n(f)$ est appelée somme de Riemann à pas constant. On peut, bien évidemment, définir des sommes de Riemann de pas non constant. Dans ce cas, la valeur du pas est le plus grand écart entre deux valeurs successives de la subdivision, comme pour les fonctions en escalier.

Ce théorème, subtil mélange des sommes de Riemann et du théorème (5), est parfois appelé théorème de Riemann-Darboux.

Interprétation graphique : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\dfrac{b-a}{n}f(a_k) = (a_{k+1}-a_k)f(a_k)$ donc $\mathrm{S}_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ représente la somme des aires algébriques des rectangles R_k de base $a_{k+1}-a_k$ et de hauteur $f(a_k)$ pour k variant de 0 à $n-1$.

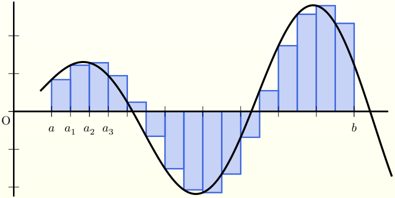


Figure 11 – Méthode des rectangles (à gauche).

Interprétation graphique : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\dfrac{b-a}{n}f(a_k) = (a_{k+1}-a_k)f(a_k)$ donc $\mathrm{S}_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ représente la somme des aires algébriques des rectangles R_k de base $a_{k+1}-a_k$ et de hauteur $f(a_k)$ pour k variant de 0 à $n-1$.

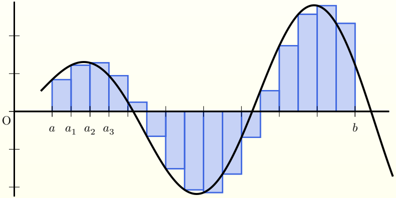


Figure 11 – Méthode des rectangles (à gauche).

En d'autres termes, le théorème (18) affirme donc que pour une fonction continue sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{S}_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarques : Dans la pratique, on se ramène toujours à l'intervalle $[0\,;1]$:

- Si f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ alors :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques : Dans la pratique, on se ramène toujours à l'intervalle $[0\,;1]$:

- Si f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ alors :

$$\mathrm{S}_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- De même, on peut montrer que si f est continue sur $[0\,;1]$ on a aussi :

$$\mathrm{S}_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques : Dans la pratique, on se ramène toujours à l'intervalle $[0\,;1]$:

- Si f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ alors :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- De même, on peut montrer que si f est continue sur $[0\,;1]$ on a aussi :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Dans tous les cas, $\mathrm{S}_n(f)$ représente la moyenne des n valeurs prises par f en les x_k sur l'intervalle $[a\,;b]$ ou $[0\,;1]$.

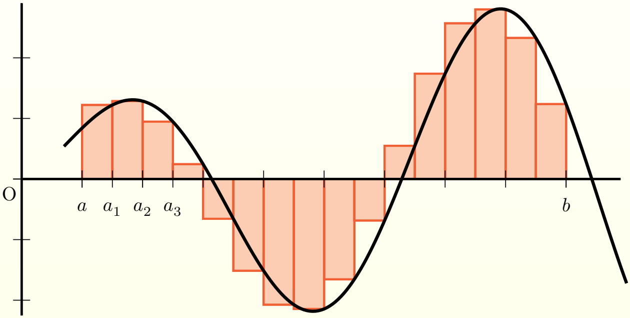


Figure 12 – Méthode des rectangles (à droite).

Exercice 9 :

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ , \ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse a_k et a_{k+1}.

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse a_k et a_{k+1}.

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}.$$

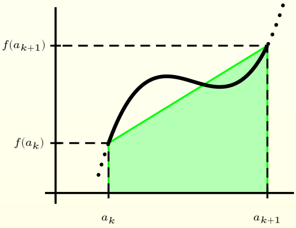


Figure 13 – Méthode des trapèzes.

La différence entre cette méthode et celle des rectangles est extrêmement minime en termes de calculs, puisqu'il suffit de calculer $n+1$ valeurs de la fonction f (au lieu de n) et calculer une somme (là encore avec une seule addition supplémentaire).
Pourtant, comme nous allons le voir, l'erreur commise est nettement plus faible.

La différence entre cette méthode et celle des rectangles est extrêmement minime en termes de calculs, puisqu'il suffit de calculer $n+1$ valeurs de la fonction f (au lieu de n) et calculer une somme (là encore avec une seule addition supplémentaire).
Pourtant, comme nous allons le voir, l'erreur commise est nettement plus faible.

Théorème 19 (Admis :-() :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f\in\mathcal{C}^2([a\,;b])$, $\left|\mathrm{T}_n(f)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_2\,\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ où $\mathrm{M}_2 = \sup\limits_{x\in[a;b]}|f''(x)|$.

Théorème 19 (Admis :-() :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors
$$\mathrm{T}_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f\in\mathcal{C}^2([a\,;b])$, $\left|\mathrm{T}_n(f)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \mathrm{M}_2\,\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ où $\mathrm{M}_2=\sup\limits_{x\in[a;b]}|f''(x)|$.

Le théorème (19) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{T}_n(f)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse a_k, a_{k+1} et $\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole).

La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse a_k, a_{k+1} et $\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole).

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$\mathrm{S}i_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1}).$$

Cette méthode donnes des valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui convergent encore plus rapidement que les deux méthodes précédentes.

Théorème 20 (Totalement admis et Hors-Programme) :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors

$$\mathrm{S}i_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f \in \mathcal{C}^4([a\,;b])$, $\left|\mathrm{S}i_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_4\,\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}$ où $\mathrm{M}_4 = \sup\limits_{x\in[a;b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

VI. Sommes de Riemann

3. Méthode de Simpson

Théorème 20 (Totalement admis et Hors-Programme) :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors

$$\mathrm{S}i_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f\in\mathcal{C}^4([a\,;b])$, $\left|\mathrm{S}i_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_4\,\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}$ où $\mathrm{M}_4 = \displaystyle\sup_{x\in[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Le théorème (20) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a\,;b]$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{S}i_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$ [4]

[4]. Ça commence à être pas mal mais on a mieux...

VII. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 6 :

Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$, noté $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ le nombre complexe défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f) + i \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(f)$$

Exemple 12 :

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \end{array}$.

On a $\mathrm{Re}\,(f): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}$ et $\mathrm{Im}\,(f): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t). \end{array}$

D'où,

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^\pi + \mathrm{i}\,[-\cos(t)]_0^\pi = 2\,\mathrm{i}\,.$$

Globalement, on va conserver toutes les propriétés sauf celles liées à la relation d'ordre à la borne supérieure absentes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21 :

Soient $f,\, g : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$, $c \in [a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Linéarité : $\displaystyle\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$

Globalement, on va conserver toutes les propriétés sauf celles liées à la relation d'ordre à la borne supérieure absentes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21 :

Soient $f, g : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$, $c \in [a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Linéarité : $$\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Relation de Chasles : $$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Globalement, on va conserver toutes les propriétés sauf celles liées à la relation d'ordre à la borne supérieure absentes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21 :

Soient $f, g : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$, $c \in [a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Linéarité : $$\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Relation de Chasles : $$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Inégalité triangulaire : $$\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right|_{\mathbb{C}} \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|_{\mathbb{C}}\,\mathrm{d}t.$$

Remarques :

- $\mathbb{C}$ n'étant pas doté d'une relation naturelle d'ordre, on ne retrouve pour les fonctions à valeurs complexes ni la propriété de positivité de l'intégrale, ni la croissance de l'intégrale.

Remarques :

- $\mathbb{C}$ n'étant pas doté d'une relation naturelle d'ordre, on ne retrouve pour les fonctions à valeurs complexes ni la propriété de positivité de l'intégrale, ni la croissance de l'intégrale.
- Les formules de l'intégration par parties, de changement de variable, et la formule de Taylor avec reste intégral se généralisent sans difficulté.

Remarques :

- $\mathbb{C}$ n'étant pas doté d'une relation naturelle d'ordre, on ne retrouve pour les fonctions à valeurs complexes ni la propriété de positivité de l'intégrale, ni la croissance de l'intégrale.
- Les formules de l'intégration par parties, de changement de variable, et la formule de Taylor avec reste intégral se généralisent sans difficulté.
- La formule de Taylor-Lagrange dépendant du théorème de Rolle n'est plus valable mais l'inégalité, comme celle des accroissements finis, subsiste pour les fonctions à valeurs complexes.