Applications linéaires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 27

Sommaire I

Pour comparer des structures mathématiques du même type, on considère les applications d'un ensemble dans un autre qui préservent les opérations définies sur ces ensembles :

- Lorsque l'on étudie des ensembles, on s'intéresse aux applications bijectives, qui préservent le « nombre d'éléments » de l'ensemble.
- En analyse, on étudie les fonctions continues, qui préservent l'opération de limite
- En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent l'addition et la multiplication par un scalaire : les applications linéaires.

Les applications linéaires sont donc des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de maths très divers.

Pour comparer des structures mathématiques du même type, on considère les applications d'un ensemble dans un autre qui préservent les opérations définies sur ces ensembles :

- Lorsque l'on étudie des ensembles, on s'intéresse aux applications bijectives, qui préservent le « nombre d'éléments » de l'ensemble.
- En analyse, on étudie les fonctions continues, qui préservent l'opération de limite
- En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent l'addition et la multiplication par un scalaire : les applications linéaires.

Les applications linéaires sont donc des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de maths très divers.

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ réduit à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{Y}$ est bijective si, et seulement si il existe $g : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ une application telle que :

$$g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{Y}}.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f.

De plus, $f^{-1} : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ est bijective d'inverse f.

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{Y}$ est bijective si, et seulement si il existe $g : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ une application telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f.

De plus, $f^{-1} : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ est bijective d'inverse f.

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la proposition (4) , que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, est injective.

I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{Y}$ est bijective si, et seulement si il existe $g : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ une application telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f.

De plus, $f^{-1} : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ est bijective d'inverse f.

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la proposition (4) , que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$, est surjective.

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{Y}$ est bijective si, et seulement si il existe $g : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ une application telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f.

De plus, $f^{-1} : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ est bijective d'inverse f.

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la proposition (4) , que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$, est surjective.

I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{Y}$ est bijective si, et seulement si il existe $g : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ une application telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f.

De plus, $f^{-1} : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ est bijective d'inverse f.

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la proposition (4) , que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$, est surjective.

Dis autrement dans un langage de groupe, f est bijective si, et seulement si f est inversible dans $(\mathcal{F}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}), \circ)$.

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ leur ensemble.

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ leur ensemble.
- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ leur ensemble.
- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Proposition :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$$f \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \iff f^{-1} \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})\,.$$

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ leur ensemble.
- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Proposition :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$$f \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \iff f^{-1} \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})\,.$$

Vocabulaire : Deux espaces vectoriels sont dit isomorphes s'il existe un isomorphisme entre eux.

Exemples 1 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec pour isomorphisme :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

C'est cet isomorphisme qui permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de façon légèrement abusive, mais transparente.

Exemples 1 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec pour isomorphisme :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

C'est cet isomorphisme qui permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de façon légèrement abusive, mais transparente.

- $\varphi : \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Suites géométriques} \\ \text{de raison } q \neq 0 \end{array} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & u_0 \end{array}$ est un isomorphisme.

Corollaire 1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Corollaire I :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
2. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme :
   $\forall\, f \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,,\; g \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})\,,$
   $$f \circ g \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{G}) \quad \text{et} \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Exemple 2 (Isomorphisme en analyse) :

Soient $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Alors :

1. $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

Exemple 2 (Isomorphisme en analyse) :

Soient $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Alors :

1. $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.
2. Pour tout réel t_0, l'application $\mathrm{T}_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0)\,;y'(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$ puisqu'elle est linéaire et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 1 :

Montrer que l'application $\mathrm{S} : f \longmapsto (f', f(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Exercice 1 :

Montrer que l'application $\mathrm{S} : f \longmapsto (f', f(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Cet isomorphisme est un peu surprenant car $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est à la fois beaucoup plus petit que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et isomorphe à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, donc plus gros que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$!

Définition/Théorème 1 (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Définition/Théorème 1 (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Exemples 3 :

- $(x\,;y) \longmapsto (x+y\,;x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Définition/Théorème 1 (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

Exemples 3 :

- $(x\,;y) \longmapsto (x+y\,;x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- Les homothéties non nulles $\lambda.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ avec $\lambda \neq 0$ sont des automorphismes de E avec $(\lambda.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})^{-1} = \lambda^{-1}.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.

Définition/Théorème 1 (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Exemples 3 :

- $(x\,;y) \longmapsto (x+y\,;x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- Les homothéties non nulles $\lambda.\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ avec $\lambda \neq 0$ sont des automorphismes de E avec $(\lambda.\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{-1} = \lambda^{-1}.\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
- Les symétries $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *i.e.* $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ sont des automorphismes de E tels que $s^{-1} = s$.

L'ensemble $\left(\mathcal{L}(\mathrm{E}), +, \circ\right)$ *est ce qu'on appelle un anneau non commutatif. L'addition joue son rôle usuel et la composition joue à peu de choses près le rôle de la multiplication dans les ensembles de nombres usuels (*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *par exemple).*

En effet, la composition admet un élément neutre qui est l'application identité et elle est distributive par rapport à l'addition, tout comme le produit dans les ensembles de nombres mais toutes les applications linéaires ne sont pas inversibles (seuls les automorphismes le sont).

En ce sens, $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$ *peut également être vu comme l'ensemble des éléments inversibles de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$*.*

En fait, nous verrons plus loin que la composition d'applications linéaires s'identifie effectivement à un produit, celui des matrices. Pour l'instant, nous utilisons déjà cette analogie pour justifier l'énorme abus de notation suivant : pour une application linéaire, on notera $f \circ f = f^2$ *(un carré au sens « produit » n'aurait en général aucun sens), et plus généralement* f^n *la composée de* f n *fois par elle-même.*

Exercice 2 :

Montrer que l'application suivante est un automorphisme et expliciter son automorphisme réciproque.

$$v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+4z \\ x+y-z \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

Analysons maintenant le lien entre les propriétés d'une application linéaire et celles de familles particulières des espaces vectoriels concernés. Que se passe-t-il durant le transport ?
Tout d'abord un petit lemme utile en pratique :

Lemme 1 (Lemme de transport) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

L'image de toute famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Analysons maintenant le lien entre les propriétés d'une application linéaire et celles de familles particulières des espaces vectoriels concernés. Que se passe-t-il durant le transport ?
Tout d'abord un petit lemme utile en pratique :

Lemme 1 (Lemme de transport) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

L'image de toute famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 3 :

Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2z \\ -x-z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

1. f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

1. f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
2. f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

1. f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
2. f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.
3. f est bijective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une base de F.

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

1. f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
2. f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.
3. f est bijective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une base de F.

Exemple 4 (Important) :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Comme $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{Im}\,(f)$ est surjective, on déduit de la propriété précédente que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Ainsi, on retrouve :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))\,.$$

Exercice 4 :

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x, y) \longmapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.

Exercice 4 :

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x, y) \longmapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.
2. $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P} - \mathrm{X}\mathrm{P}' - \mathrm{P}(0)$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dans lui-même.

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

On verra plus loin (confer corollaire (3)) que la réciproque est vraie.

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

On verra plus loin (confer corollaire (3)) que la réciproque est vraie.

Théorème 3 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors :

(i) f est surjective $\iff$ (ii) f est injective $\iff$ (iii) f est bijective.

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E et F sont isomorphes,
alors ils ont la même dimension.

On verra plus loin (confer corollaire (3)) que la réciproque est vraie.

Théorème 3 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors :

$$(i)\ f \text{ est surjective} \iff (ii)\ f \text{ est injective} \iff (iii)\ f \text{ est bijective.}$$

Méthode 1 :

Pour montrer qu'un endomorphisme de E est bijectif il suffit de montrer que f est injectif (en montrant par exemple que $\ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$) ou que f est surjectif (en montrant $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$).

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) :

Soient α_0, α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{array}.$$

Alors :

1. φ est linéaire.

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) :

Soient α_0, α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(\alpha_0), \mathrm{P}(\alpha_1), \dots, \mathrm{P}(\alpha_n)) \end{array}.$$

Alors :

1. φ est linéaire.
2. φ est bijective car aisément injective entre deux espaces de même dimension $n+1$.

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) :

Soient α_0, α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{array}.$$

Alors :

1. φ est linéaire.
2. φ est bijective car aisément injective entre deux espaces de même dimension $n+1$.
3. L'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'est autre que la base des polynômes de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ associée à $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$:

$$\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}.$$

Toute fonction définie sur un ensemble contenant les α_j coïncide en chacun de ces $(n+1)$ points avec le polynôme défini par :

$$P = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i) L_i.$$

Exercice 5 :

Montrer que $\mathrm{P} \longmapsto \left(\mathrm{P}(0), \mathrm{P}'(0), \dots, \mathrm{P}^{(n)}(0)\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

Proposition 4 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.

Proposition 4 :

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. f est inversible à gauche *i.e.* $\exists\, g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})$, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Proposition 4 :

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. f est inversible à gauche *i.e.* $\exists\, g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E}),\ g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
3. f est inversible à droite *i.e.* $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E}),\ f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

Proposition 4 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. f est inversible à gauche *i.e.* $\exists\, g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E}),\ g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
3. f est inversible à droite *i.e.* $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E}),\ f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

De plus, les inverses à gauche et à droite coïncident nécessairement avec f^{-1}.

Proposition 4 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. f est inversible à gauche *i.e.* $\exists\, g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E}),\ g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
3. f est inversible à droite *i.e.* $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E}),\ f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

De plus, les inverses à gauche et à droite coïncident nécessairement avec f^{-1}.

Moralité : En dimension finie, l'existence d'un inverse à gauche ou à droite suffit à l'existence d'un inverse et, dans tous les cas, c'est le même.

ATTENTION

Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie.

En effet, la dérivation D, par exemple, a un inverse à droite tel que $D \circ P = Id_E$, mais on a $P \circ D \neq Id_F$.

En particulier, D n'est pas un isomorphisme.

Précisons quelques propriétés des espaces isomorphes.

Rappel :

On dit que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Précisons quelques propriétés des espaces isomorphes.

Rappel :

On dit que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Remarque : La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie).

Précisons quelques propriétés des espaces isomorphes.

Rappel :

On dit que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Remarque : La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie).

Une mathématicienne à son ami :

- Es-tu fidèle ?

- Oui, à isomorphisme près.

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On considère l'application
$$\phi_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On considère l'application $\phi_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On considère l'application
$$\phi_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est injective ;

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On considère l'application

$$\phi_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est injective ;
- $\mathcal{F}$ est une base de E $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est bijective ;

Corollaire 3 :

1. Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Corollaire 3 :

1. Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
2. Deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie sont isomorphes.

Corollaire 3 :

1. Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
2. Deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie sont isomorphes.

Corollaire 3 :

1. Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
2. Deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie sont isomorphes.

En combinant le corollaire (2) et le corollaire (3) on obtient :

Théorème 6 :

Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.

Corollaire 3 :

1. Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
2. Deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie sont isomorphes.

En combinant le corollaire (2) et le corollaire (3) on obtient :

Théorème 6 :

Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.

Si on considère l'ensemble des espaces vectoriels de dimension finie, les classes d'équivalences pour la relation $\simeq$ sont donc paramétrées par $\mathbb{N}$.

Méthode 2 :

Pour montrer que E est de dimension finie n, on dispose de deux méthodes :

- exhiber une base de n vecteurs.

Méthode 2 :

Pour montrer que E est de dimension finie n, on dispose de deux méthodes :

- exhiber une base de n vecteurs.
- exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n.

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $ay'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$ de dimension 2, puisqu'on a vu que l'application :

$$\mathrm{T}_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0)\,; y'(t_0)) \end{array}$$

  est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $ay'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$ de dimension 2, puisqu'on a vu que l'application :

$$\mathrm{T}_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0)\,; y'(t_0)) \end{array}$$

  est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.

- L'ensemble $\mathcal{S}_2$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 *i.e.* vérifiant une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2 en considérant l'isomorphisme :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0\,;u_1) \end{array}$$

II. Définition d'une application linéaire

Exemple 7 :

Soit E un espace de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, l'application $\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} & \longmapsto & x_i \end{array}$ est une forme linéaire appelée fonction $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

En particulier, $\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;n]\!], \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Théorème 7 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(\mathrm{E}) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad g(e_i) = f_i.$$

Théorème 7 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(\mathrm{E}) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad g(e_i) = f_i.$$

À retenir :

Corollaire 4 :

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Théorème 7 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(\mathrm{E}) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!], \quad g(e_i) = f_i.$$

À retenir :

Corollaire 4 :

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Exemple 8 :

Considérons l'ensemble P des vecteurs du plan muni d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

La donnée de $f\left(\vec{i}\right) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f\left(\vec{j}\right) = \vec{i} + \vec{j}$ suffit à définir $f \in \mathcal{L}(\mathrm{P})$.

Par exemple, si $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, on a $f(\vec{u}) = ...$

Une application :

Proposition 8 :

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim\left(\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\right) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F}).$$

Une application :

Proposition 8 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim\left(\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\right) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F})\,.$$

Exemple 9 (Dimension du dual en dimension finie) :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

L'ensemble $\mathrm{E}^* = \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E a donc même dimension que E.

Exercice 6 :

Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les applications coordonnées correspondantes.

Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*, appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$;

Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$;

Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} = 0$.

1. Montrer que $\ker(f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \cap \ker(f - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = \{0\}$.

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$;

Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{I}d_\mathrm{E} = 0$.

1. Montrer que $\ker(f - \mathrm{I}d_\mathrm{E}) \cap \ker(f - 2\mathrm{I}d_\mathrm{E}) = \{0\}$.
2. Simplifier $(f - \mathrm{I}d_\mathrm{E}) \circ (f - 2\mathrm{I}d_\mathrm{E})$.
   En déduire que $\mathrm{Im}\,(f - 2\mathrm{I}d_\mathrm{E}) \subset \ker(f - \mathrm{I}d_\mathrm{E})$.

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$;

Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{I}d_\mathrm{E} = 0$.

1. Montrer que $\ker(f - \mathrm{I}d_\mathrm{E}) \cap \ker(f - 2\mathrm{I}d_\mathrm{E}) = \{0\}$.
2. Simplifier $(f - \mathrm{I}d_\mathrm{E}) \circ (f - 2\mathrm{I}d_\mathrm{E})$.
   En déduire que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{I}d_\mathrm{E}) \subset \ker(f - \mathrm{I}d_\mathrm{E})$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{I}d_\mathrm{E}) \subset \ker(f - 2\mathrm{I}d_\mathrm{E})$.

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$;

Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} = 0$.

1. Montrer que $\ker(f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \cap \ker(f - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = \{0\}$.
2. Simplifier $(f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \circ (f - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.
   En déduire que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \subset \ker(f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \subset \ker(f - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.
4. Prouver que $\mathrm{E} = \ker(f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(f - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$

Aide : $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} = (f - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) - (f - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.

III. Rang d'une application linéaire

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$:

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\mathrm{rg}\left(0_{\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}\right) = 0$, et c'est la seule telle application.

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$:

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\mathrm{rg}\left(0_{\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}\right) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$ alors $\mathrm{rg}\,(p_1) = 1$.

III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$:

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\mathrm{rg}\,\left(0_{\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}\right) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$ alors $\mathrm{rg}\,(p_1) = 1$.
- Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\mathrm{rg}\,(\varphi) = 1$.

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On appelle rang de f la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$:

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\mathrm{rg}\left(0_{\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}\right) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$ alors $\mathrm{rg}\,(p_1) = 1$.
- Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\mathrm{rg}\,(\varphi) = 1$.
- Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{rg}\,(p) = \dim\,(\mathrm{F})$.

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\operatorname{Im}(f)$:

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\operatorname{rg}\left(0_{\mathcal{L}(E;F)}\right) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$ alors $\operatorname{rg}(p_1) = 1$.
- Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$.
- Si $E = F \oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $\operatorname{rg}(p) = \dim(F)$.
- Si E est de dimension finie et $\lambda \neq 0$, alors $\operatorname{rg}(\lambda \mathrm{Id}_E) = \dim(E)$.

Théorème 10 (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(\mathrm{E})\,;\dim(\mathrm{F}))\,.$$

Plus précisément :

1. Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{F})$, avec égalité si, et seulement si f est surjective.

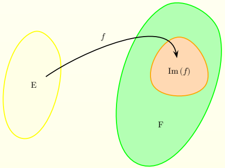

Figure 1 – En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

Théorème 10 (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(\mathrm{E})\,;\dim(\mathrm{F}))\,.$$

Plus précisément :

1. Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{F})$, avec égalité si, et seulement si f est surjective.
2. Si E est de dimension finie, f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{E})$, avec égalité si, et seulement si f est injective.

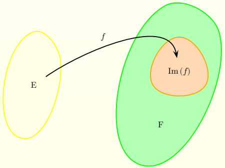

Figure 1 – En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

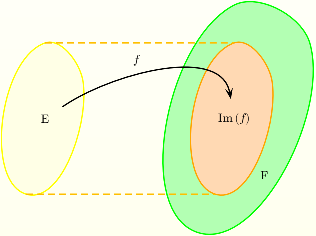

Figure 2 – f est injective si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{E})$.

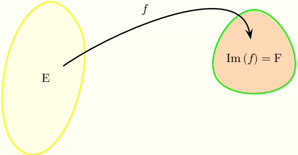

Figure 3 – f est surjective si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{F})$.

Exercice 8 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que
$\mathrm{E} = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \iff \mathrm{E} = \ker(f) + \operatorname{Im}(f) \iff \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Proposition II :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Alors :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(f) ; \operatorname{rg}(g)).$$

Proposition 11 :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Alors :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(f) ; \operatorname{rg}(g)).$$

Proposition 12 :

Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{G} ; \mathrm{E})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F} ; \mathrm{H})$ sont des **isomorphismes** alors :

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f \circ u) = \operatorname{rg}(v \circ f).$$

Le rang est inchangé par isomorphisme.

Exercice 9 (Inégalité triangulaire) :

On considère deux endomorphismes f et g d'un espace E de dimension finie.

Établir que $|\mathrm{rg}\,(g) - \mathrm{rg}\,(f)| \leqslant \mathrm{rg}\,(g+f) \leqslant \mathrm{rg}\,(g) + \mathrm{rg}\,(f)$.

III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Théorème 13 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Tout supplémentaire de $\ker(f)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.

En particulier,

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{E}).$$

Remarques :

1. La dimension de l'image $\operatorname{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**.
   C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\mathrm{E})$ et $\dim(\operatorname{Im}(f))$.

Remarques :

1. La dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**.
   C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\mathrm{E})$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.
2. La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.

Remarques :

1. La dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**.
   C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\mathrm{E})$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.
2. La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
3. Cette formule permet de trouver $\dim(\mathrm{E})$, $\mathrm{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connait, on peut en déduire la 3$^{\text{ème}}$.

Remarques :

1. La dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**.
   C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\mathrm{E})$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.
2. La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
3. Cette formule permet de trouver $\dim(\mathrm{E})$, $\mathrm{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connait, on peut en déduire la $3^{\text{ème}}$.
4. Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :

Remarques :

1. La dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**.
   C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\mathrm{E})$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.
2. La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
3. Cette formule permet de trouver $\dim(\mathrm{E})$, $\mathrm{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connait, on peut en déduire la $3^{\text{ème}}$.
4. Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
   - Il n'existe pas de d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Remarques :

1. La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**.
   C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\text{E})$ et $\dim(\text{Im}(f))$.
2. La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
3. Cette formule permet de trouver $\dim(\text{E})$, $\text{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connait, on peut en déduire la $3^{\text{ème}}$.
4. Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
   - Il n'existe pas de d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
   - Il n'existe pas de d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 :

1. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.

Exercice 10 :

1. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.
   1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.

Exercice 10 :

1. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.
   1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.
   2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (2x + y - z, x - y)$.

Exercice 10 :

1. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.
   1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.
   2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (2x + y - z, x - y)$.
2. Déterminer une base du noyau, et une base de l'image pour chacune d'elles.

ATTENTION

Il s'agit d'une égalité de dimension, pas d'espaces ! On n'a pas, en général, $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \ker\,(f)$: $\ker\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.

- En général, ils ne sont même pas dans le même espace ($\ker\,(f) \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{F}$) !

ATTENTION

Il s'agit d'une égalité de dimension, pas d'espaces ! On n'a pas, en général, $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \ker\,(f)$: $\ker\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.

- En général, ils ne sont même pas dans le même espace ($\ker\,(f) \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{F}$) !
- Même lorsque f est un endomorphisme, on n'a pas nécessairement $\ker\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{E}$!

  Par exemple, pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0). \end{array}$ On a $\ker\,(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}\,(1\,;0)$: $\ker\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

À l'aide du théorème (13) on redémontre aisément des résultats connus :

Corollaire 5 (Caractérisation des isomorphismes) :

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

À l'aide du théorème (13) on redémontre aisément des résultats connus :

Corollaire 5 (Caractérisation des isomorphismes) :

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.
$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$
2. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
$$\ker(f) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{E} \iff \mathrm{rg}\, f = \dim(\mathrm{E}) \iff f \in \mathcal{G}l(\mathrm{E})$$

ATTENTION

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie !

Contre-Exemples II :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,x-y) \end{array}$ est linéaire, injective, mais non surjective.

ATTENTION

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie !

Contre-Exemples II :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,x-y) \end{array}$ est linéaire, injective, mais non surjective.
- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP} \end{array}$ est un endomorphisme injectif, mais non surjectif.

ATTENTION

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie !

Contre-Exemples II :

- $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,x-y) \end{array}$ est linéaire, injective, mais non surjective.
- $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$ est un endomorphisme injectif, mais non surjectif.
- $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est un endomorphisme surjectif, mais non injectif.

Exercice ll :

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné).

Soit φ l'application définie par :

$$\forall\, P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

Exercice II :

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné).

Soit φ l'application définie par :

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Rappel :

- On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :

Rappel :

- On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
  - $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.

Rappel :

- On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
  - $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.
  - $b \in \mathrm{F}$, appelé second membre de l'équation.

Rappel :

- On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
  - $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.
  - $b \in \mathrm{F}$, appelé second membre de l'équation.
  - $x \in \mathrm{E}$, un vecteur quelconque.

Rappel :

- On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
  - $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.
  - $b \in \mathrm{F}$, appelé second membre de l'équation.
  - $x \in \mathrm{E}$, un vecteur quelconque.
- On appelle équation homogène associée à $f(x) = b$ l'équation linéaire $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.

Proposition 14 :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.

1. L'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$ est $\ker(f)$.

Proposition 14 :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.

1. L'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$ est $\ker(f)$.
2. L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solution de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si $b \in \operatorname{Im}(f)$ et, dans ce cas :

$$(\mathcal{S}) = x_0 + (\mathcal{S}_0),$$

où x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$.

Proposition 14 :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.

1. L'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_\mathrm{F}$ est $\ker(f)$.
2. L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solution de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si $b \in \mathrm{Im}(f)$ et, dans ce cas :

$$(\mathcal{S}) = x_0 + (\mathcal{S}_0),$$

   où x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$.

Remarque : Si f est bijective, liquation linéaire $f(x) = b$ admet une unique solution.

Exemples 12 :

- Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

est une équation linéaire $f(\mathrm{X}) = \mathrm{B}$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = (b_1, \dots, b_n).$$

Exemples 12 :

- Les droites, les plans de l'espace sont caractérisés par une équation linéaire.
  - $(\mathcal{P}) = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \Phi\,(x\,;y\,;z) = 0_{\mathbb{R}}\right\} = \Phi^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ où

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$$

Exemples 12 :

- Les droites, les plans de l'espace sont caractérisés par une équation linéaire.
  - $(\mathcal{P}) = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \Phi\,(x\,;y\,;z) = 0_{\mathbb{R}}\right\} = \Phi^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ où

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$$

  - $(\mathcal{D}) = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \varphi\,(x\,;y\,;z) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\} = \varphi^{-1}(0_{\mathbb{R}^2})$ où

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples 12 :

- Toute équation différentielle linéaire d'ordre un $y' + a(t)y = b(t)$ peut être interprétée comme une équation linéaire $f(y) = b(t)$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array} \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}).$$

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E\,;\mathbb{K})$ leur ensemble.

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E\,;\mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition (Hyperplan) :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle hyperplan de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E.

IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{E}^* = \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition (Hyperplan) :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle hyperplan de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E.

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \longmapsto 0_{\mathrm{E}}$ est E tout entier.

On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan de E.

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{E}^* = \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition (Hyperplan) :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle hyperplan de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E.

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \longmapsto 0_{\mathrm{E}}$ est E tout entier.
On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan de E.

Conséquence : En dimension finie, tout Hyperplan est un ensemble décrit par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées dans une base fixée.

Exemples 13 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \longmapsto 2x + y - z$.

Exemples 13 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \longmapsto 2x + y - z$.
- L'ensemble $\mathrm{H} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}'(1) + \mathrm{P}(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, noyau de la forme linéaire non nulle $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'(1) + \mathrm{P}(0)$.

  On voit moins bien ici que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a, b, c, d de P : $\quad \mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$, H est décrit par l'équation $3a + 2b + c + d = 0$.

Exemples 13 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x+y-z=0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z) \longmapsto 2x+y-z$.
- L'ensemble $\mathrm{H} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}'(1)+\mathrm{P}(0)=0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, noyau de la forme linéaire non nulle $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'(1)+\mathrm{P}(0)$.

  On voit moins bien ici que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a,b,c,d de P : $\quad \mathrm{P} = a\mathrm{X}^3+b\mathrm{X}^2+c\mathrm{X}+d$, H est décrit par l'équation $3a+2b+c+d=0$.
- L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, f'(0)=f(0)\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, noyau de la forme linéaire non nulle $f \longmapsto f(0)-f'(0)$.

  Ici, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E.

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E.
2. H est supplémentaire d'une droite de E.

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E.
2. H est supplémentaire d'une droite de E.

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E.
2. H est supplémentaire d'une droite de E.

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

Exemples 14 :

En dimension 3, les hyperplans sont des plans et en dimension 2, les hyperplans sont des droites.

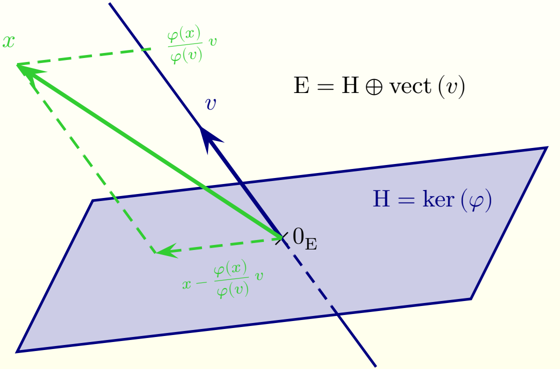

Figure 4 – $\mathbb{R}^3$ est engendré par une droite et un plan ne la contenant pas.

Exemples 15 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.

Exemples 15 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
- $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, noyau de la $(n+1)^{\text{ème}}$ forme coordonnée.

Exemples 15 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
- $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, noyau de la $(n+1)^{\text{ème}}$ forme coordonnée.
- La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ dans ce cas) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 16 :

- L'ensemble $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\quad 2x+y=z+t\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4-1=3$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle

$$(x,y,z,t) \longmapsto 2x+y-z-t.$$

Exemples 16 :

- L'ensemble $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \quad 2x+y=z+t\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4-1=3$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle
$$(x,y,z,t)\longmapsto 2x+y-z-t.$$
- L'ensemble $\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \ / \quad \mathrm{P}(0)=\mathrm{P}(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ de dimension $5-1=4$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle
$$\mathrm{P}\longmapsto \mathrm{P}(1)-\mathrm{P}(0).$$

Exercice 12 :

Soit H un hyperplan de E de dimension finie.

Montrer que, pour tout $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$, $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathbb{K}.a$.

Théorème 16 (Comparaison des équations d'un hyperplan) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau.

Alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\mathrm{H} = \ker(\varphi) = \ker(\psi) \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \psi = \lambda\varphi.$$

Théorème 16 (Comparaison des équations d'un hyperplan) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau.

Alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\mathrm{H} = \ker(\varphi) = \ker(\psi) \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \psi = \lambda\varphi.$$

En résumé, tout hyperplan possède une et une seule « vraie » équation, toutes ses équations sont multiples les unes des autres.

Nous connaissions bien ce résultat en géométrie élémentaire, le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ et le plan d'équation $2x + 2y + 4z = 0$ sont évidemment un seul et même plan, et ce plan n'a pas d'équation « vraiment » différente.

Exercice 13 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{C}[X] \,/\, P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

Considérons un système d'équations linéaires homogène de n équations à p inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, posons $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p$.

φ_i est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. Son noyau est donc un hyperplan H_i.

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système correspond ainsi à l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{H}_i$ de n hyperplans de $\mathbb{R}^p$.

De manière plus générale :

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in [\![1\,;n]\!]$.

1. L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.

De manière plus générale :

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in [\![1\,;n]\!]$.

1. L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n-r$.
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

De manière plus générale :

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in [\![1\,;n]\!]$.

1. L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

Dans $\mathbb{R}^3$, nous savons bien qu'une équation scalaire décrit un plan et que deux telles équations, pour peu qu'elles ne soient pas multiples l'une de l'autre, décrivent une droite.

L'idée générale du théorème ci-dessus, c'est que dans un système linéaire, chaque équation occasionne POTENTIELLEMENT la perte d'une dimension par rapport au nombre total d'inconnues.

Pourquoi potentiellement ? Parce que certaines équations peuvent être redondantes et ne pas compter vraiment dans le système.

Par exemple, le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{r} x+y-2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x-z=0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ décrit une droite de dimension $1 \geqslant 3-3=0$ et non un point de $\mathbb{R}^3$ car la troisième équation n'est jamais que la somme des deux premières.

Le théorème s'applique.

V. Endomorphismes remarquables

Nous allons retrouver dans ce paragraphe un premier lien vraiment concret entre algèbre linéaire et géométrie, en étudiant quelques types d'applications linéaires bien particulières, que vous connaissez déjà en géométrie plane depuis longtemps.

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle homothétie de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$:

$$h : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda._{\mathrm{E}} x \end{array}.$$

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle homothétie de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme $\lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$:

$$h : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda._{\mathrm{E}} x \end{array}.$$

Cela correspond bien à la notion usuelle d'homothétie de rapport λ, toujours centrée en l'origine quand on travaille dans un espace vectoriel.

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle homothétie de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme λId_{E} :

$$h: \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda ._{\mathrm{E}} x \end{array}.$$

Proposition 18 :

Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E dont l'automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

V. Endomorphismes remarquables

1. Homothéties

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle homothétie de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme $\lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$:

$$h : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda._{\mathrm{E}} x \end{array}.$$

Proposition 18 :

Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E dont l'automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Remarque : En tant que multiples de l'identité, les homothéties commutent avec tous les autres endomorphismes de E. On peut d'ailleurs prouver que ce sont les seules applications linéaires dans ce cas.

Exercice 14 :

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

Définition 5 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E.

On appelle projection (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}_1$ telle que :

$$\forall\, x_1 \in \mathrm{E}_1,\ p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall\, x_2 \in \mathrm{E}_2,\ p(x_2) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rccc} p : & \mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 \\ & x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1. \end{array}$$

Définition 5 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E.

On appelle projection (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \longmapsto E_1$ telle que :

$$\forall\, x_1 \in E_1,\ p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall\, x_2 \in E_2,\ p(x_2) = 0_E.$$

Ainsi,

$$p : \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1. \end{array}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

Définition 5 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E.

On appelle projection (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \longmapsto E_1$ telle que :

$$\forall\, x_1 \in E_1,\ p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall\, x_2 \in E_2,\ p(x_2) = 0_E.$$

Ainsi,

$$p : \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1. \end{array}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

On dira qu'une application p est un projecteur s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E tels que p soit la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
Notons qu'il est indispensable de préciser l'espace E_2 parallèlement auquel on projette. Il n'y a pour l'instant aucune notion de projection orthogonale dans un espace vectoriel.

Remarque : L'existence et l'unicité d'une telle application linéaire p est donnée par la proposition (9) avec

$$f_{|E_1} : \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E \\ x_1 & \longmapsto & x_1 \end{array} \quad \text{et} \quad f_{|E_2} : \begin{array}{ccc} E_2 & \longrightarrow & E \\ x_2 & \longmapsto & 0_E. \end{array}$$

Exemple 17 :

Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$ *i.e.* $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}\overrightarrow{e_1} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{e_2} = \mathrm{D}_1 \oplus \mathrm{D}_2$.

On peut alors définir la projection p sur D_1 parallèlement à D_2 :

$$p: \begin{array}{rcl} \vec{\mathcal{E}}_2 = \mathrm{D}_1 \oplus \mathrm{D}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 \\ \vec{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} & \longmapsto & \overrightarrow{x_1}. \end{array}$$

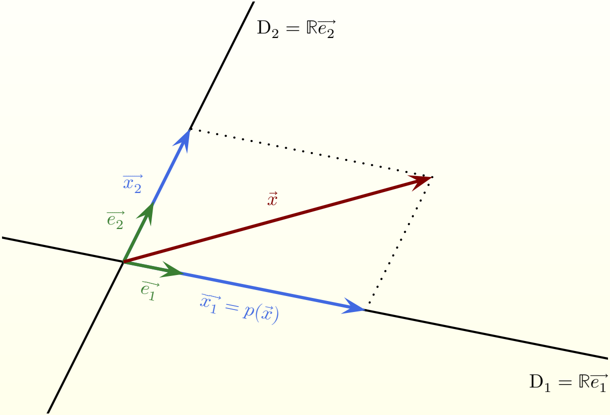

Figure 5 – Exemple de projecteur dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $p \circ p = p$ (On dit que p est idem-potent.)

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $p \circ p = p$ (On dit que p est idem-potent.)
3. $E_2 = \ker(p)$.

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $p \circ p = p$ (On dit que p est idem-potent.)
3. $E_2 = \ker(p)$.
4. $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $p \circ p = p$ (On dit que p est idem-potent.)
3. $E_2 = \ker(p)$.
4. $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

En particulier, si p est un projecteur alors $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) :

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$$p \text{ est un projecteur } \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \ker\,(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\ker\,(p)$.

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) :

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$$p \text{ est un projecteur } \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \ker\,(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\ker\,(p)$.

ATTENTION

$x \longmapsto |x|$ est idem-potente mais n'est pas une projection. La linéarité est importante !

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) :

Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \ker\,(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\ker\,(p)$.

ATTENTION

$x \longmapsto |x|$ est idem-potente mais n'est pas une projection. La linéarité est importante !

Ce théorème signifie que l'étude des applications linéaires idem-potentes est achevée.

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

1. p est un projecteur.

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

1. p est un projecteur.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$:
$$\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

1. p est un projecteur.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$:
$$\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$
3. p est LA projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

1. p est un projecteur.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$:
$$\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$
3. p est LA projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

À retenir :

Dans le cas d'un projecteur p, retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall\, u \in \mathrm{E},\ u = \underbrace{p(u)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{u - p(u)}_{\in \ker(p)}.$$

Exemple 18 :

Considérons l'application du plan $p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right). \end{array}$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Exemple 18 :

Considérons l'application du plan $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right). \end{array}$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p\Big(p((x,y))\Big) = p\left(\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = p((x,y))$.
  Donc $p \circ p = p$.

Exemple 18 :

Considérons l'application du plan $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right). \end{array}$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p\Big(p((x,y))\Big) = p\left(\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = p((x,y))$.
  Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

Exemple 18 :

Considérons l'application du plan $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{array}$.

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p\Big(p((x,y))\Big) = p\left(\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = p((x,y))$.
  Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

De plus :

$$(x,y) \in \ker(p) \iff \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = (0,0) \iff y = -x \iff (x,y) = (x,-x)$$
$$\iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,-1).$$

$$(x,y) \in \operatorname{Im}(p) \iff x = y \iff (x,y) = (x,x) \iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,1).$$

Exemple 18 :

Considérons l'application du plan $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right). \end{array}$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p\Big(p((x,y))\Big) = p\left(\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = p((x,y))$.
  Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

De plus :

$$(x,y) \in \ker(p) \iff \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = (0,0) \iff y = -x \iff (x,y) = (x,-x)$$
$$\iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,-1).$$

$$(x,y) \in \mathrm{Im}\,(p) \iff x = y \iff (x,y) = (x,x) \iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,1).$$

Donc, p est le projecteur sur $\mathbb{R}(1,1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1,-1)$.

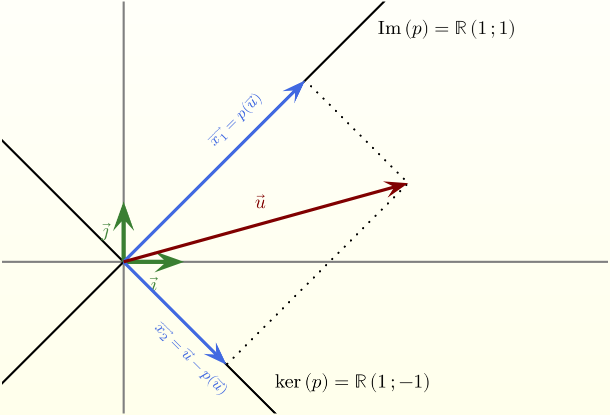

Figure 6 – Projection sur la droite $y = x$ parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 :

Identifier l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -9x+6y \\ -15x+10y \\ -5x+3y+z \end{pmatrix} \end{array}$

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

On dit que p et q sont des projecteurs associés.

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

On dit que p et q sont des projecteurs associés.

Proposition 21 :

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

On dit que p et q sont des **projecteurs associés**.

Proposition 21 :

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

1. $p + q = \mathrm{Id}_E$.

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

On dit que p et q sont des projecteurs associés.

Proposition 21 :

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

1. $p + q = \mathrm{Id}_E$.
2. $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que $p \circ q = p \iff \ker(q) \subset \ker(p)$.

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que $p \circ q = p \iff \ker(q) \subset \ker(p)$.
2. Démontrer que $p \circ q = q \iff \operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p)$.

Définition 7 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

$$\forall\, x = x_1 + x_2 \in E \text{ où } (x_1\,;x_2) \in E_1 \times E_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Définition 7 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.

$$\forall\, x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E} \text{ où } (x_1\,; x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$s : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2. \end{array}$$

Définition 7 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.

$$\forall\, x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E} \text{ où } (x_1\,;x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2. \end{array}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

Définition 7 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.

$$\forall\, x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E} \text{ où } (x_1\,;x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rrcl} s : & \mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2. \end{array}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

Remarque : On a aussi $s = p - q$ où p et q sont les projecteurs associés à la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$.

Exemple 19 :

Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$ *i.e.* $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}\overrightarrow{e_1} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{e_2} = \mathrm{D}_1 \oplus \mathrm{D}_2$.

On peut alors définir la symétrie s par rapport à D_1 parallèlement à D_2 :

$$\begin{array}{rccc} s: & \vec{\mathcal{E}}_2 = \mathrm{D}_1 \oplus \mathrm{D}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 \\ & \vec{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} & \longmapsto & \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}. \end{array}$$

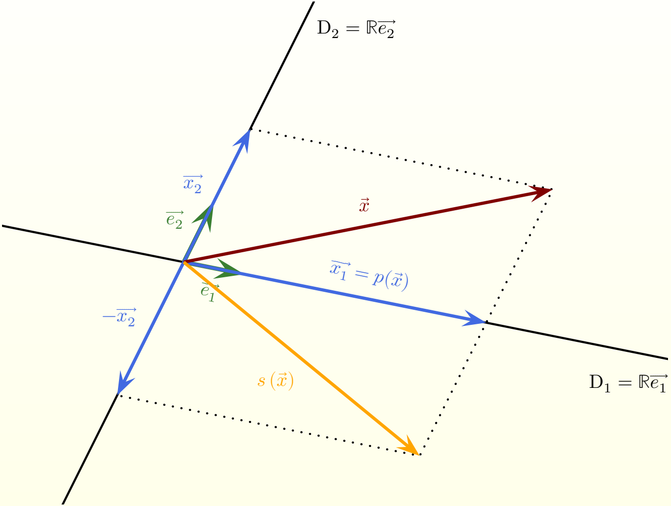

Figure 7 – Exemple de symétrie dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(E)$

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(E)$
2. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ *i.e.* s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$
2. $s \circ s = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ *i.e.* s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
3. $\mathrm{E}_1 = \ker(s - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s.

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$
2. $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ *i.e.* s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
3. $\mathrm{E}_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s.
4. $\mathrm{E}_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s.

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$
2. $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ *i.e.* s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
3. $\mathrm{E}_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s.
4. $\mathrm{E}_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s.

En particulier, si s est une symétrie alors $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$.

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$
2. $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ *i.e.* s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
3. $\mathrm{E}_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s.
4. $\mathrm{E}_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s.

En particulier, si s est une symétrie alors $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$.

Ces conditions signifient simplement que ce par rapport à quoi on symétrise $\mathrm{E}_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ est laissé fixe par s, et ce parallèlement à quoi on symétrise $\mathrm{E}_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ est envoyé sur son opposé.

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) :

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}.$$

Plus précisément, $\mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) :

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}.$$

Plus précisément, $\mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

ATTENTION

$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est involutive mais n'est pas une symétrie. La linéarité est importante !

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) :

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}.$$

Plus précisément, $\mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

ATTENTION

$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est involutive mais n'est pas une symétrie. La linéarité est importante !

Comme pour les projecteurs, ce théorème signifie que l'étude des applications linéaires involutives est achevée.

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$ alors on peut affirmer :

1. s est une symétrie.

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ alors on peut affirmer :

1. s est une symétrie.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$:

$$E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E).$$

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ alors on peut affirmer :

1. s est une symétrie.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$:

$$\mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}).$$

3. s est LA symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ alors on peut affirmer :

1. s est une symétrie.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$:

$$\mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}).$$

3. s est LA symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

À retenir :

Dans le cas d'une symétrie s, retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall\, u \in \mathrm{E},\ u = \underbrace{\frac{u + s(u)}{2}}_{\in \ker(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})} + \underbrace{\frac{u - s(u)}{2}}_{\in \ker(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})}.$$

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $\mathrm{E} = \ker(s) \oplus \mathrm{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $E = \ker(s) \oplus \operatorname{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Exemple 20 :

Soit $S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $\mathrm{E} = \ker(s) \oplus \mathrm{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Exemple 20 :

Soit $\mathrm{S} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$

- $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $\mathrm{S}(\mathrm{S}((x,y))) = \mathrm{S}((y,x)) = (x,y)$ d'où $\mathrm{S} \circ \mathrm{S} = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $E = \ker(s) \oplus \mathrm{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Exemple 20 :

Soit $S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x,y))) = S((y,x)) = (x,y)$ d'où $S \circ S = \mathrm{Id}_E$.

On en déduit que S est une symétrie.

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $E = \ker(s) \oplus \operatorname{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Exemple 20 :

Soit $S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x,y))) = S((y,x)) = (x,y)$ d'où $S \circ S = Id_E$.

On en déduit que S est une symétrie.

De plus,
$(x,y) \in \ker(S - Id_E) \iff (y,x) = (x,y) \iff x = y \iff (x,y) = (x,x) \iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,1)$.

$$\begin{aligned}(x,y) \in \ker(S + Id_E) &\iff (y,x) = (-x,-y) \iff x = -y \iff (x,y) = (x,-x) \\ &\iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,-1).\end{aligned}$$

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $\mathrm{E} = \ker(s) \oplus \mathrm{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Exemple 20 :

Soit $\mathrm{S} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$

- $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $\mathrm{S}(\mathrm{S}((x,y))) = \mathrm{S}((y,x)) = (x,y)$ d'où $\mathrm{S} \circ \mathrm{S} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

On en déduit que S est une symétrie.

De plus,
$(x,y) \in \ker(\mathrm{S} - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \iff (y,x) = (x,y) \iff x = y \iff (x,y) = (x,x) \iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,1)$.

$$(x,y) \in \ker(\mathrm{S} + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \iff (y,x) = (-x,-y) \iff x = -y \iff (x,y) = (x,-x)$$
$$\iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,-1).$$

Donc S est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}(1,1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1,-1)$.

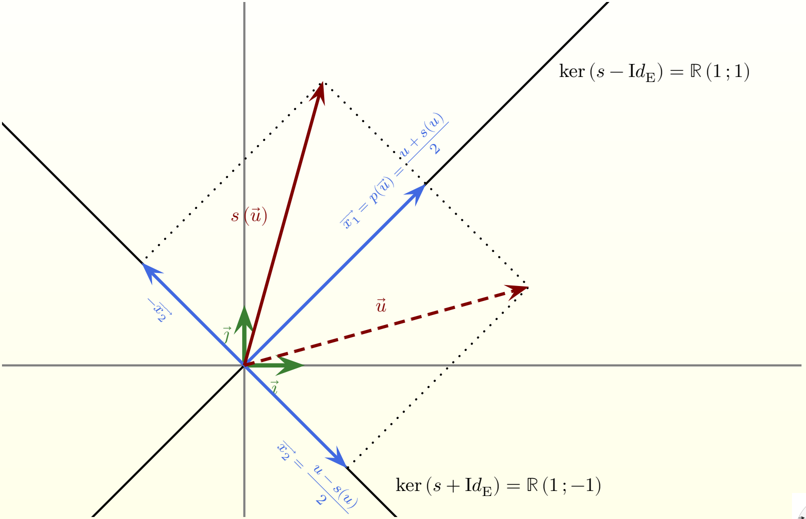

Figure 8 – Symétrie par rapport à la droite $y = x$ et parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17 :

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^3$, $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \,/\, x + 2y + z = 0\}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,((1, 1, 1))$.

1. Vérifier que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Exercice 17 :

Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{(x, y, z) \,/\, x + 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}\left((1, 1, 1)\right)$.

1. Vérifier que $F \oplus G = E$.
2. Soit s la symétrie de base F de direction G. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, déterminer $s((x, y, z))$.