Séries numériques

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 28

Sommaire I

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre par sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et les quelques paradoxes qu'il nous a laissés à méditer à ce sujet. Le plus connu d'entre eux est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue.

Pour fixer les idées, supposons qu'Achille coure à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres), et la tortue (un peu génétiquement modifiée) à 1 mètre par seconde. Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ?

La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ! ».

C'est là l'idée d'une série (convergente) en mathématiques : une somme d'un nombre infini de termes qui donne pourtant un résultat fini.

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre par sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et les quelques paradoxes qu'il nous a laissés à méditer à ce sujet. Le plus connu d'entre eux est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue.

Pour fixer les idées, supposons qu'Achille coure à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres), et la tortue (un peu génétiquement modifiée) à 1 mètre par seconde. Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ?

La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ! ».

C'est là l'idée d'une série (convergente) en mathématiques : une somme d'un nombre infini de termes qui donne pourtant un résultat fini.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle série de terme général u_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle série de terme général u_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- u_n s'appelle le terme général de rang n.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle **série de terme général u_n**, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- u_n s'appelle le **terme général** de rang n.
- S_n s'appelle la **somme partielle** de rang n.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

  Vocabulaire : Dans ce cas,

  - la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n.$$

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

  Vocabulaire : Dans ce cas,

  - la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée somme de la série :

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n.$$

  - On appelle reste de rang n l'élément R_n défini par :

  $$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

  Vocabulaire : Dans ce cas,

  - la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée somme de la série :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n.$$
  - On appelle reste de rang n l'élément R_n défini par :
  $$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

I. Séries numériques

1. Suites des sommes partielles

Remarques et commentaires :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[1]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, …

Remarques et commentaires :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.

⌊1⌋. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, …

Remarques et commentaires :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

⌊1⌋. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, …

Remarques et commentaires :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.

⌊1⌋. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, …

Remarques et commentaires :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Écrire la somme infinie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre (réel ou complexe) [1].

[1]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, …

Remarques et commentaires :

- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la n$^{\text{ème}}$ somme partielle.

Remarques et commentaires :

- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = 0.$$
Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la n$^{\text{ème}}$ somme partielle.
- Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Remarques et commentaires :

- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = 0.$$
Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la n$^{\text{ème}}$ somme partielle.
- Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

ATTENTION

Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

Remarques et commentaires :

- Enfin, remarquez que $\boxed{\mathrm{S}_0 = u_0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}.}$

Remarques et commentaires :

- Enfin, remarquez que $\boxed{\mathrm{S}_0 = u_0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}.}$

  Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

Remarques et commentaires :

- Enfin, remarquez que $\boxed{S_0 = u_0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}.}$

  Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

  Par exemple, si on sait que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$, alors $S_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n = S_n - S_{n-1} &= \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Exemple 1 :

Les séries arithmétiques de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} na$ où a est une constante sont toujours divergentes dès que $a \neq 0$ et on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = a\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\, a.$$

Exemple 2 :

Les séries géométriques de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ où z est un nombre complexes sont convergentes si, et seulement si $|z|<1$ et on a :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n} z^k=\frac{1}{1-z}-\frac{z^{n+1}}{1-z}\xrightarrow[|z|<1]{n\to+\infty}\frac{1}{1-z}.}$$

De plus, lorsque $|z|<1$, on a $\boxed{\mathrm{R}_n=\dfrac{z^{n+1}}{1-z}.}$

Remarque : $\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{10^n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10}}=\dfrac{10}{9}$. C'est, à une constante multiplicative près, le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue.

Exercice 1 (Séries géométriques & Co) :

1. 1. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$.

Exercice 1 (Séries géométriques & Co) :

1.
   1. Déterminer $\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$.
   2. En déduire la nature de $\sum nx^{n-1}$ selon les valeurs de x.

Exercice 1 (Séries géométriques & Co) :

1.
   1. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$.
   2. En déduire la nature de $\sum nx^{n-1}$ selon les valeurs de x.
   3. Lorsque la série converge, déterminer sa somme.

Exercice 1 (Séries géométriques & Co) :

1.
   1. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$.
   2. En déduire la nature de $\sum nx^{n-1}$ selon les valeurs de x.
   3. Lorsque la série converge, déterminer sa somme.
2. Même question pour $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$, puis $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n^2x^{n-2}$.

Exercice 1 (Séries géométriques & Co) :

1.
   1. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} nx^{n-1}$.
   2. En déduire la nature de $\sum nx^{n-1}$ selon les valeurs de x.
   3. Lorsque la série converge, déterminer sa somme.
2. Même question pour $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$, puis $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n^2x^{n-2}$.
3. Déterminer la nature et la somme de $\displaystyle\sum \frac{n^2+3n}{2^n}$.

Exemple 3 :

La série harmonique [2] $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

[2]. Son nom *harmonique* vient du fait qu'un terme est la moyenne harmonique des termes qui l'encadrent.
Rappelons que la moyenne harmonique m_h de deux réels positifs a et b est définie par $\frac{2}{m_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
Ici, on a bien $2\left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$.

Exemple 4 :

On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n$.

On exprime les sommes partielles :

$$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S_N} = \sum_{k=0}^{n} u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On en déduit que la série $\sum (-1)^n$ diverge.

Exemple 5 :

Les séries télescopiques de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{En effet, } \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots - \cancel{\frac{1}{n}}\Bigg) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.
\end{aligned}$$

D'une manière générale,

Proposition 1 (Série télescopique) :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(u_{n+1}-u_n\right)$ sont de même nature et on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_{n+1}-u_0.$$

D'une manière générale,

Proposition I (Série télescopique) :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(u_{n+1}-u_n\right)$ sont de même nature et on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_{n+1}-u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Remarque : La simplification télescopique est l'analogue discret du théorème fondamental du calcul intégral.

En effet, la suite $\left(a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{n+1-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tout comme la fonction f' définie par une limite de taux d'accroissement est la dérivée de la fonction f.

Or, comment passe-t-on de f' à f ? On somme au sens du calcul intégral, tout comme on le fait avec les suites dans le cadre d'une simplification télescopique :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m.$$

Exercice 2 :

Étudier les séries de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 :

Étudier les séries de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 3 :

1. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x+1)},\ \text{sur }]0,+\infty[.$$

Exercice 2 :

Étudier les séries de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 3 :

1. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}, \text{ sur }]0, +\infty[.$$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

Exemple 6 (Série exponentielle) :

$\forall\, z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est convergente et on a :

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \longmapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \longmapsto z^n \exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| z^{n+1} \exp(zx) \right|.$$

En notant $z = a + \mathrm{i}\, b$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leqslant \exp(|a|)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement.

Proposition 2 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 2 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 1 :

L'ensemble des séries convergentes bénéficie donc d'une structure d'espace vectoriel.

Proposition 2 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 1 :

L'ensemble des séries convergentes bénéficie donc d'une structure d'espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte...

ATTENTION

Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, il est possible que $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ... L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Il est donc interdit de découper une somme de série en deux : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

ATTENTION

Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, il est possible que $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ... L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Il est donc interdit de découper une somme de série en deux : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l' exemple (5) : La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge au contraire des deux séries $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$.

Exemple 7 :

D'après l' exemple (6) et la proposition (2) , on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Corollaire 2 :

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes.

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \sum \mathrm{Re}\,(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}\,(u_n) \text{ convergent.}$$

Corollaire 2 :

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes.

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \sum \mathrm{Re}\,(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}\,(u_n) \text{ convergent.}$$

Exemple 8 :

D'après l' exemple (6) et le corollaire (2) , on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 4 :

Après avoir démontré son existence, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$.

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 3 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge } \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 3 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge } \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0.

Par la contraposée, s'il ne le fait pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série diverge grossièrement.

Exemples 9 :

- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{n}{n+1}$ diverge.

Exemples 9 :

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leqslant 0$.

Exemples 9 :

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leqslant 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum(-1)^n$ de l' exemple (4) diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

Exemples 9 :

- Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge (grossièrement) si $\alpha\leqslant 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum(-1)^n$ de l' exemple (4) diverge de même que les séries du type $\sum\sin(n)$.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre la divergence de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ ou de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

II. Séries à terme positif

Le théorème (9) du paragraphe (IV) donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge } \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) a fortiori réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à terme de signe constant.

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 4 :

- Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists\, M > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_n \leqslant M.$$

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 4 :

- Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists\, \mathrm{M} > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_n \leqslant \mathrm{M}.$$

- Le seul cas de divergence est la limite infinie.

Exemple 10 :

La série harmonique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

II. Séries à terme positif

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence

Exemple 10 :

La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 11 :

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.

La suite des sommes partielles est donc majorée. Elle converge vers un réel inférieur à 2.

Proposition 5 :

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à terme positif.

1. $$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right) \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ diverge.} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ converge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.} \end{cases}$$

Proposition 5 :

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à terme positif.

1. $$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right) \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ diverge.} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ converge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.} \end{cases}$$
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature (d'un point de vue de la convergence).

II. Séries à terme positif

2. Critère de comparaison

Proposition 5 :

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à terme positif.

1. $$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right) \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right) \end{array}\right. \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ diverge.} \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.} \end{array}\right.$$

2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature (d'un point de vue de la convergence).

Dans les cas de convergence, à condition de faire attention aux indices de sommation, les inégalités comparaison sont maintenues pour les sommes.

Remarque : Notez bien que la clé de ce résultat est le théorème (4) qui nécessite ABSOLUMENT que les deux séries soient à terme de signe constant.

Remarque : Notez bien que la clé de ce résultat est le théorème (4) qui nécessite ABSOLUMENT que les deux séries soient à terme de signe constant.

Dans le cas d'équivalence $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, si l'une est à terme positifs, l'autre le sera également à partir d'un certain rang. Il suffira donc de chercher le signe de l'une d'elle et, en général, celui de l'équivalent sera le plus simple.

Exemples 12 :

- Les séries à terme positif $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln n}$ divergent par comparaison avec la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

Exemples 12 :

- Les séries à terme positif $\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln n}$ divergent par comparaison avec la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ converge.

Exemples 12 :

- Les séries à terme positif $\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln n}$ divergent par comparaison avec la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ converge.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln n}{n2^n}$ converge.

Exemples 12 :

- Les séries à terme positif $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$ divergent par comparaison avec la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ converge.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n2^n}$ converge.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

Exemples 12 :

- Les séries à terme positif $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$ divergent par comparaison avec la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ converge.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n2^n}$ converge.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

ATTENTION

Le critère d'équivalence est faux si le terme général des deux séries n'est pas de signe constant comme le montre les séries de l' exercice (??) .

Méthode 1 :

Soit $\sum u_n$ une série.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ **:** Si v_n est de signe constant, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
En général, on aura $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ confer la proposition (7) .

Méthode I :

Soit $\sum u_n$ une série.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ **:** Si v_n est de signe constant, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
En général, on aura $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ confer la proposition (7) .

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$ **ou** $\mathrm{o}\left(v_n\right)$ **:** À ce stade du cours, il est impératif de vérifier que u_n et v_n sont de signe positif. La proposition (5) ne s'applique que dans ce cas. Confer méthode (??) .

Soit $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ **continue**, **positive** et **décroissante**.
Pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n). \tag{1}$$

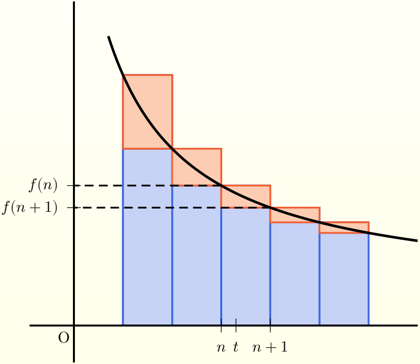

Figure 1 – Une fonction continue positive et décroissante permet d'encadrer son intégrale.

Théorème 6 :

Si $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction **continue**, **positive** et **décroissante** alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Théorème 6 :

Si $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction **continue**, **positive** et **décroissante** alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Remarque : Si f n'est pas continue en 0 ou si le terme général de la série n'est pas défini pour $n = 0$, le résultat du théorème (6) reste inchangé en remplaçant $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 6 :

Si $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction **continue**, **positive** et **décroissante** alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Remarque : Si f n'est pas continue en 0 ou si le terme général de la série n'est pas défini pour $n = 0$, le résultat du théorème (6) reste inchangé en remplaçant $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 :

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$.

Plus précisément, en pratique, vous écrirez plus souvent une succession d'inégalités conduisant au même résultat :

Méthode 2 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall\, k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,;k+1]$,

$$\begin{array}{ccccc} f(k+1) & \leqslant & f(t) & \leqslant & f(k) \\ f(k+1) & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & f(k) \\ \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n_0) & \leqslant & \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n) \end{array}$$

Plus précisément, en pratique, vous écrirez plus souvent une succession d'inégalités conduisant au même résultat :

Méthode 2 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est croissante : $\forall\, k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,;k+1]$,

$$\begin{array}{ccccc} f(k) & \leqslant & f(t) & \leqslant & f(k+1) \\ f(k) & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & f(k+1) \\ \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n) & \leqslant & \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n_0) \end{array}$$

Et pour encadrer une somme par des aires :

Méthode 3 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,; +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall\, k \geqslant n_0 + 1$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad f(k) \quad \leqslant \quad \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad \leqslant \quad f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Et pour encadrer une somme par des aires :

Méthode 3 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est croissante : $\forall\, k \geqslant n_0 + 1$,

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad f(k) \quad \leqslant \quad \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad \leqslant \quad \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas divergent ou celui d'une fonction croissante, l'encadrement de la méthode (??) permet de trouver un équivalent des sommes partielles et cette méthode s'applique encore et souvent pour trouver des équivalents de restes de séries convergentes.

Exemples 13 :

Vous montrerez sûrement (*confer* exercice (13)) que :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$.

Définition 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On appelle **série de Riemann** la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Définition 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On appelle **série de Riemann** la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 7 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si, et seulement si } \alpha > 1.$$

Exemples 14 :

1. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exemples 14 :

1. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
2. $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ convergent. $\sum \frac{1}{n^{1,0000000000000001}}$ converge.

Exemples 14 :

1. La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
2. $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ convergent. $\sum \dfrac{1}{n^{1{,}0000000000000001}}$ converge.
3. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ divergent. $\sum \dfrac{1}{n^{0{,}99999999999999999}}$ diverge.

Commentaires : Arrêtons nous un instant sur les deux séries de nature contraire $\sum \dfrac{1}{n}$ divergente et $\sum \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ convergente pour ε strictement positif aussi petit que l'on veut. Quand bascule-t-on de la divergence à la convergence ?

Le résultat de l' exercice (5) est intéressant en ce sens qu'il montre qu'il y a de la place entre ces deux séries. L'aptitude des ln à contrebalancer la divergence est le propos des séries de l' exercice (6) , dites, de Bertrand :

Commentaires : Arrêtons nous un instant sur les deux séries de nature contraire $\sum \frac{1}{n}$ divergente et $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ convergente pour ε strictement positif aussi petit que l'on veut. Quand bascule-t-on de la divergence à la convergence ?

Le résultat de l' exercice (5) est intéressant en ce sens qu'il montre qu'il y a de la place entre ces deux séries. L'aptitude des ln à contrebalancer la divergence est le propos des séries de l' exercice (6) , dites, de Bertrand :

Exercice 6 (Séries de Bertrand) :

Soit $(\alpha; \beta)$ un couple de réels.

Montrer que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge $\iff \alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Un peu d'histoire :

Définition 3 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle fonction ζ de Riemann la fonction définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Cette fonction est définie tout à fait rigoureusement et correctement à la condition que $\mathrm{Re}\,(z) > 1$. *Nous avons déjà démontré que c'était le cas pour* z *réel et* $z > 1$. *Vous démontrerez bientôt le reste.*

En particulier, on notera que $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *et* $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^4}{90}$.

Toutes les valeurs de la fonction ζ *pour les entiers pairs sont bien connues depuis longtemps, et peuvent s'exprimer à l'aide des puissances paires de* π *et de nombres appelés nombres de Bernoulli qui sont très classiques en théorie des nombres (l'étude des nombres entiers).*

Un peu d'histoire :

Définition 3 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle fonction ζ de Riemann la fonction définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Curieusement, les valeurs pour les entiers impairs ne s'expriment pas du tout aussi simplement, et on sait même très peu de choses sur elles. On a, par exemple, simplement réussi à démontrer que $\zeta(3)$ était un nombre irrationnel en 1977. Quelques progrès ont été effectués depuis puisqu'on sait désormais qu'une infinité des valeurs prises par la fonction ζ pour les entiers impairs sont irrationnelles, mais on ne sait pas lesquelles (on soupçonne qu'elles le sont toutes) !

Un peu d'histoire :

Définition 3 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle fonction ζ de Riemann la fonction définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

La fonction ζ est par ailleurs fondamentale pour de nombreux problèmes mathématiques, et intervient notamment de façon centrale dans l'étude des propriétés des nombres premiers. Sans chercher à rentrer dans les détails (si vous êtes vraiment motivés, un simple coup d'oeil à la page Wikipedia consacrée à cette fonction devrait vous faire très peur), citons simplement le plus célèbre problème posé par cette fonction, qui reste un problème ouvert à l'heure actuelle (si vous arrivez à démontrer cette conjecture, un million de dollars pour vous) :

Conjecture de Riemann (1859) :

Les zéros non triviaux de la fonction ζ ont une partie réelle égale à $\dfrac{1}{2}$.

Méthode 4 :

Soit $\sum u_n$ une série à terme positif.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

Méthode 4 :

Soit $\sum u_n$ une série à terme positif.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\lim_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

Lemme 1 :

Soit $\sum u_n$ une série à terme **strictement** positif.

1. S'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Lemme 1 :

Soit $\sum u_n$ une série à terme **strictement** positif.

1. S'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On peut améliorer ce résultat un petit peu :

Proposition 8 :

Soit $\sum u_n$ une série à terme **strictement** positif tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors,

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

On peut améliorer ce résultat un petit peu :

Proposition 8 :

Soit $\sum u_n$ une série à terme **strictement** positif tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors,

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On peut améliorer ce résultat un petit peu :

Proposition 8 :

Soit $\sum u_n$ une série à terme **strictement** positif tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors,

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple 15 :

- $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ avec $x > 0$:

  On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

  En prime, on en déduit que :

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff x^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n!\right).$$

Exemple 15 :

- $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ avec $x > 0$:

  On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

  En prime, on en déduit que :

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff x^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n!\right).$$

- $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$:

  On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{e} < 1$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

  En prime, on en déduit que :

$$\frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff n! \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(n^n\right).$$

Remarque : Le critère de D'Alembert, séduisant à priori par sa simplicité d'utilisation, tombe très souvent sur le cas douteux.

Il s'utilise principalement quand on se trouve en présence de factorielles ou de termes de nature géométrique du type a^n et, a fortiori, sera bien adapté à l'étude des séries entières que vous rencontrerez l'année prochaine.

Exercice 7 :

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{2.4.6\dots(2n)}{n^n}$.

Exercice 8 :

Calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 9 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}$.

Exercice 9 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}$.

Exercice 10 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

Exercice 9 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}$.

Exercice 10 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

Exercice 11 :

Après avoir vérifié sa convergence, calculer la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$.

Exercice 12 :

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$.

Exercice 13 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

Exercice 14 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 14 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

On revient dans ce paragraphe aux séries de terme général quelconque.

Définition 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

IV. Séries absolument convergentes

1. Condition suffisante de convergence

Définition 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Par linéarité de la somme et l'inégalité triangulaire, l'ensemble des séries absolument convergentes hérite aussi d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Par linéarité de la somme et l'inégalité triangulaire, l'ensemble des séries absolument convergentes hérite aussi d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 9 (CA $\implies$ CV) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exemples 16 :

- $\sum z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$.

Exemples 16 :

- $\sum z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$.
- $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exemples 16 :

- $\sum z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$.
- $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

ATTENTION

La convergence de $\sum |u_n|$ est une condition suffisante pour que $\sum u_n$ converge.

Elle n'est pas nécessaire : il existe des séries $\sum u_n$ convergentes telles que $\sum |u_n|$ diverge. Ces séries sont appelées semi-convergentes.

Méthode 5 :

Soit $\sum u_n$ une série.

En complément de la **méthode** (??) : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ avec $\sum v_n$ absolument convergente alors $\sum u_n$ converge (absolument).

En cas de divergence, on ne peut rien affirmer sans connaître le signe de u_n et v_n.
Confer **méthode** (??) .

Méthode 5 :

Soit $\sum u_n$ une série.

En complément de la **méthode** (??) : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ avec $\sum v_n$ absolument convergente alors $\sum u_n$ converge (absolument).

En cas de divergence, on ne peut rien affirmer sans connaître le signe de u_n et v_n.

Confer **méthode** (??) .

Exercice 15 :

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^{\frac{3}{2}} + \cos(n)}$ converge.

Le théorème cité ci-dessous n'est pas forcément au programme de première année mais il le sera l'an prochain et nous permettra de donner des exemples et contre-exemples intéressants.

Théorème 10 (Critère spécial des séries alternées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0.

Alors,

- La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ est convergente.

Le théorème cité ci-dessous n'est pas forcément au programme de première année mais il le sera l'an prochain et nous permettra de donner des exemples et contre-exemples intéressants.

Théorème 10 (Critère spécial des séries alternées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0.

Alors,

- La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ est convergente.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $\left|\mathrm{R}_n\right| \leqslant u_{n+1}$.

(Hors-Programme)

Le théorème cité ci-dessous n'est pas forcément au programme de première année mais il le sera l'an prochain et nous permettra de donner des exemples et contre-exemples intéressants.

Théorème 10 (Critère spécial des séries alternées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0.

Alors,

- La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ est convergente.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $\left|\mathrm{R}_n\right| \leqslant u_{n+1}$.

On retient généralement le dernier point sous la forme : « Le reste est majoré par le premier terme négligé » en valeur absolue.

Le théorème cité ci-dessous n'est pas forcément au programme de première année mais il le sera l'an prochain et nous permettra de donner des exemples et contre-exemples intéressants.

Théorème 10 (Critère spécial des séries alternées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0.

Alors,

- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ est convergente.
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $\left|\mathrm{R}_n\right| \leqslant u_{n+1}$.

On retient généralement le dernier point sous la forme : « Le reste est majoré par le premier terme négligé » en valeur absolue.

Remarque : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_{2n+1} \leqslant \mathrm{S} \leqslant \mathrm{S}_{2n}$.

Exemples 17 :

Le théorème des séries alternées permet de montrer que des séries comme les séries de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $(-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ qui ne sont pas absolument convergentes, sont convergentes.

Exemple 18 :

Je rappelle ici que l'étude de la nature d'une série n'a rien à voir avec la recherche de sa limite qui est souvent un tout autre problème.

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Exemple 18 :

Je rappelle ici que l'étude de la nature d'une série n'a rien à voir avec la recherche de sa limite qui est souvent un tout autre problème.

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

1. On peut aisément montrer sa convergence en utilisant le critère spécial des séries alternées :

   Trivialement, $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant donc le *critère spécial des séries alternées* entraîne la convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exemple 18 :

Je rappelle ici que l'étude de la nature d'une série n'a rien à voir avec la recherche de sa limite qui est souvent un tout autre problème.

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

2. Mais, on peut aussi directement montrer sa convergence vers une limite inspirée :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\,dt \\ &= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par passage à la limite sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\ln 2$.

Exemple 18 :

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$

2. Mais, on peut aussi directement montrer sa convergence vers une limite inspirée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\,dt$$
$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\text{D'où } \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par passage à la limite sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\ln 2.$

Cette série, dite série harmonique alternée, donne un premier exemple de série convergente mais non absolument convergente. Un contre-exemple à garder en tête donc !

Exercice 16 :

Montrer que la série de Riemann alternée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :
    1. On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :
    1. On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.
    2. On applique les théorèmes d'équivalence/domination/comparaison avec des séries de références (géométrique et Riemann).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :
    1. On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.
    2. On applique les théorèmes d'équivalence/domination/comparaison avec des séries de références (géométrique et Riemann).
3. Si le terme général de la série est de signe quelconque :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :
    1. On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.
    2. On applique les théorèmes d'équivalence/domination/comparaison avec des séries de références (géométrique et Riemann).
3. Si le terme général de la série est de signe quelconque :
    1. On étudie la convergence absolue de la série.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :
   1. On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.
   2. On applique les théorèmes d'équivalence/domination/comparaison avec des séries de références (géométrique et Riemann).
3. Si le terme général de la série est de signe quelconque :
   1. On étudie la convergence absolue de la série.
   2. On étudie la semi-convergence de la série à l'aide du critère spécial des séries alternées ou, plus tard, des transformations d'Abel.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :
    1. On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.
    2. On applique les théorèmes d'équivalence/domination/comparaison avec des séries de références (géométrique et Riemann).
3. Si le terme général de la série est de signe quelconque :
    1. On étudie la convergence absolue de la série.
    2. On étudie la semi-convergence de la série à l'aide du critère spécial des séries alternées ou, plus tard, des transformations d'Abel.
    3. On peut essayer d'effectuer un développement asymptotique de son terme général.

Exercice 17 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 17 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire l'existence d'un réel $k > 0$ tel que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} k\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$