# Géométrie de l'espace

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 31

# Sommaire I

*Dans l'espace, personne ne vous entendra crier.*

***Tagline du film Alien, le huitième passager.***

Nous continuons dans ce chapitre notre étude des techniques de base en géométrie, mais cette fois-ci dans l'espace. Rien ne change très profondément par rapport à ce que nous avons vu dans le plan, il y a simplement une coordonnée de plus … et un peu plus de place re… !

Dans tout le chapitre, on note $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace et, dans tous les exercices, l'espace sera muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé direct.

# I. Mode de repérage

**Définition 1 (Vecteurs coplanaires) :**

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un triplet $(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \neq (0\,;0\,;0)$ de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

# I. Mode de repérage

**Définition 1 (Vecteurs coplanaires) :**

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un triplet $(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \neq (0\,;0\,;0)$ de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Si l'un des trois coefficients, par exemple $\alpha$, est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici $\vec{u}$ et $\vec{v}$) sont colinéaires.

**Définition 1 (Vecteurs coplanaires) :**

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un triplet $(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \neq (0\,;0\,;0)$ de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Si l'un des trois coefficients, par exemple $\alpha$, est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici $\vec{u}$ et $\vec{v}$) sont colinéaires.

Dans le cas général, $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui signifie bien intuitivement qu'il se situe « dans le plan » défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

**Définition 2 :**

- On appelle base de $\vec{\mathcal{E}}$ tout triplet de vecteurs non coplanaires $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

**Définition 2 :**

- On appelle base de $\vec{\mathcal{E}}$ tout triplet de vecteurs non coplanaires $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
- On appelle repère (cartésien) de $\mathcal{E}$ tout quadruplet $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, où O est un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$.
  O est appelé origine du repère.

**Définition 2 :**

- On appelle base de $\vec{\mathcal{E}}$ tout triplet de vecteurs non coplanaires $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
- On appelle repère (cartésien) de $\mathcal{E}$ tout quadruplet $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, où O est un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$.
  O est appelé origine du repère.

**Cas particuliers :**

- Le repère et la base sont dits orthogonaux si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.

**Définition 2 :**

- On appelle base de $\vec{\mathcal{E}}$ tout triplet de vecteurs non coplanaires $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
- On appelle repère (cartésien) de $\mathcal{E}$ tout quadruplet $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, où O est un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$.
  O est appelé origine du repère.

**Cas particuliers :**

- Le repère et la base sont dits orthogonaux si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
- Si de plus, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires alors le repère et la base sont dits orthonormés.

**Proposition 1 :**

Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$.

Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où } (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

On dit que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

**Proposition 1 :**

Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$.

Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \;\text{ où } (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

On dit que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

En particulier, pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \;\text{ où } (x\,;y)\,z \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

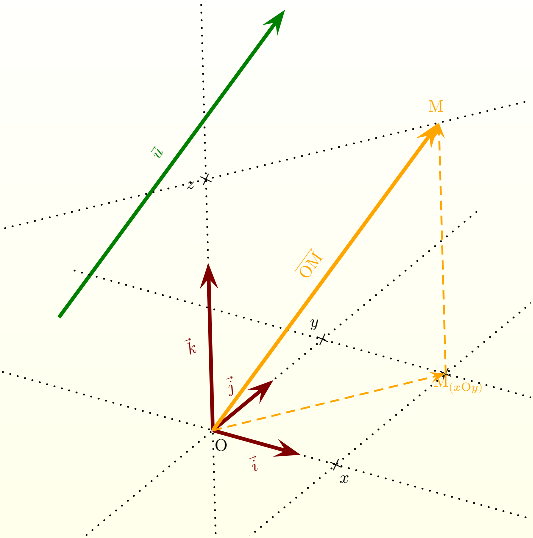



**Figure 1** – Coordonnées cartésiennes d'un point et d'un vecteur de l'espace.

**Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :**

- Soient $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$.
  On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (1).

**Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :**

- Soient $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$.
  On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (1).
- On appelle coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (2).

**Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :**

- Soient $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$.
  On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (1).
- On appelle coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (2).

**Vocabulaire** : $x$, $y$ et $z$ sont respectivement appelés, abscisse, ordonnée et côte de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Bien entendu, les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.

**Rappel (Coordonnées de vecteurs) :**

Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

**Rappel (Coordonnées de vecteurs) :**

Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$.

**Rappel (Coordonnées de vecteurs) :**

Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$.
- Si I est le milieu de [AB] alors $\mathrm{I}\left(\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{A}}}{2}\,;\frac{y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{A}}}{2}\,;\frac{z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{A}}}{2}\right)$.

# I. Mode de repérage
## 2. Coordonnées cylindriques

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$ et $\mathrm{M}'$ son projeté orthogonal sur le plan $(\mathrm{O}xy)$.

$\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est un repère du plan $(\mathrm{O}xy)$.

$\mathrm{M}'$ admet pour coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$ dans ce repère *i.e.*

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \rho u_\theta = \rho\cos(\theta)\vec{i} + \rho\sin(\theta)\vec{j}.$$

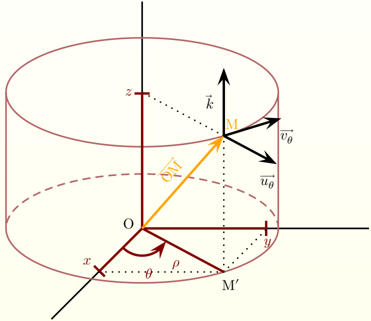



**Figure 2** – Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.

**Définition 4 (Coordonnées cylindriques) :**

On appelle coordonnées cylindriques de M tout triplet $(\rho\,;\theta\,;z)$ tel que :

**Remarques :**

- Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.
  On impose l'unicité si on exige $\rho > 0$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$, ce qui exclut le point O. (sic !)

**Remarques :**

- Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.
  On impose l'unicité si on exige $\rho > 0$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$, ce qui exclut le point O. (sic !)
- Si un point M a pour coordonnées cartésiennes $(x\,;y\,;z)$ et pour coordonnées cylindriques $(\rho\,;\theta\,;z)$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ alors :

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta) \quad \text{et } z \text{ est inchangé !}$$

**Remarques :**

- Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.
  On impose l'unicité si on exige $\rho > 0$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$, ce qui exclut le point O. (sic !)
- Si un point M a pour coordonnées cartésiennes $(x\,;y\,;z)$ et pour coordonnées cylindriques $(\rho\,;\theta\,;z)$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ alors :

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta) \quad \text{et } z \text{ est inchangé !}$$

**ATTENTION**

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ne correspond pas à la distance du point M à l'origine du repère, mais à la distance OM′, où M′ est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}\,; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.

**Définition 5 (Coordonnées sphériques) :**

On appelle coordonnées sphériques de M tout triplet $(r\,;\theta\,;\varphi)$ tel que :

- $r = \mathrm{OM}$

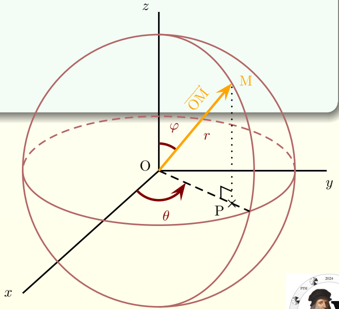



Figure 3 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.

**Vocabulaire** : $r$, $\theta$ et $\varphi$ sont respectivement appelés rayon, longitude et colatitude de M dans le repère $(\mathrm{O}\,; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

**Définition 5 (Coordonnées sphériques) :**

On appelle coordonnées sphériques de M tout triplet $(r\,;\theta\,;\varphi)$ tel que :

- $r = \mathrm{OM}$
- Les coordonnées polaires de P, projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, sont $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

**Vocabulaire** : $r$, $\theta$ et $\varphi$ sont respectivement appelés rayon, longitude et colatitude de M dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

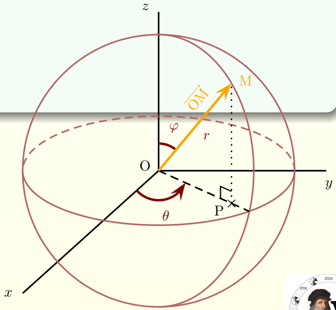



**Figure 3** – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

**Définition 5 (Coordonnées sphériques) :**

On appelle **coordonnées sphériques** de M tout triplet $(r\,;\theta\,;\varphi)$ tel que :

- $r = \mathrm{OM}$
- Les coordonnées polaires de P, projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, sont $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
- $\varphi \equiv \left(\widehat{\vec{k}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\right) \in [0\,;\pi]$. C'est un angle non orienté.

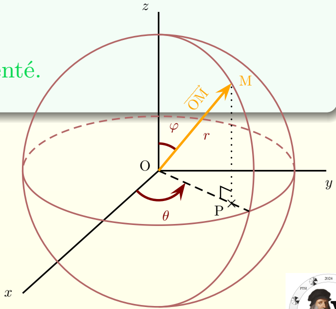



Figure 3 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.

**Vocabulaire** : $r$, $\theta$ et $\varphi$ sont respectivement appelés **rayon**, **longitude** et **colatitude** de M dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Si un point M a pour coordonnées sphériques $(r\,;\theta\,;\varphi)$ alors P, le projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, a pour coordonnées polaires $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j}$.

Or, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = r\cos(\varphi)\vec{k}$.

Si un point M a pour coordonnées sphériques $(r\,;\theta\,;\varphi)$ alors P, le projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, a pour coordonnées polaires $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j}$.

Or, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = r\cos(\varphi)\vec{k}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j} + r\cos(\varphi)\vec{k} \iff \mathrm{M}\begin{pmatrix} r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Si un point M a pour coordonnées sphériques $(r\,;\theta\,;\varphi)$ alors P, le projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, a pour coordonnées polaires $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j}$.

Or, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = r\cos(\varphi)\vec{k}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j} + r\cos(\varphi)\vec{k} \iff \mathrm{M}\begin{pmatrix} r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Il n'est en général pas aisé de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques car il faut avoir deux angles remarquables à reconnaitre pour obtenir une expression simple.

**Exercice 1 :**

Déterminer les coordonnées sphériques du point $\mathrm{M}\left(1\,;1\,;\sqrt{2}\right)$.

**ATTENTION**

Ne pas confondre latitude et colatitude ! La latitude est un angle appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

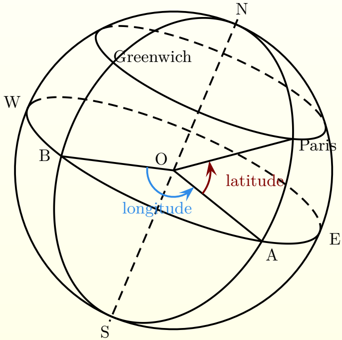



**Figure 4** – Coordonnées géographiques.

# II. Produit scalaire

Soient A, B et C trois points de l'espace alors il existe un plan $(\mathcal{P})$ contenant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En effet, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, il suffit de prendre un plan contenant la droite (AB), le plan (ABC) sinon.

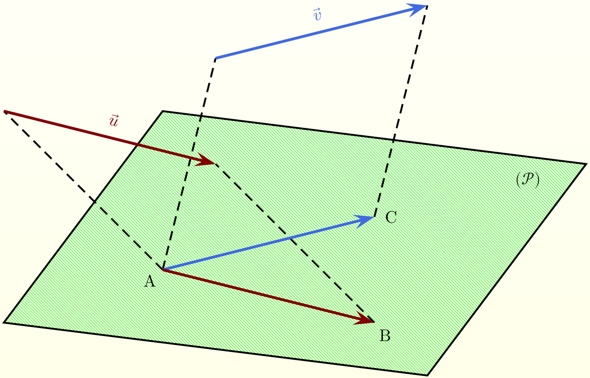



**Figure 5** – Produit scalaire dans l'espace.

**Définition 6 (Produit scalaire) :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$, B et C de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $(\mathcal{P})$ un plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ calculé dans le plan $(\mathcal{P})$.

**Définition 6 (Produit scalaire) :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$, B et C de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $(\mathcal{P})$ un plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ calculé dans le plan $(\mathcal{P})$.

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{cases} \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{(P.S 1)}$$

(P.S 2)

**Définition 6 (Produit scalaire) :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$, B et C de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $(\mathcal{P})$ un plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ calculé dans le plan $(\mathcal{P})$.

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{cases} \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \tag{P.S 1}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} \text{ avec H le projeté orthogonal de C sur (AB)} \tag{P.S 2}$$

**Définition 6 (Produit scalaire) :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$, B et C de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $(\mathcal{P})$ un plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ calculé dans le plan $(\mathcal{P})$.

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{cases} \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \tag{P.S 1}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} \text{ avec H le projeté orthogonal de C sur (AB)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \tag{P.S 2}$$

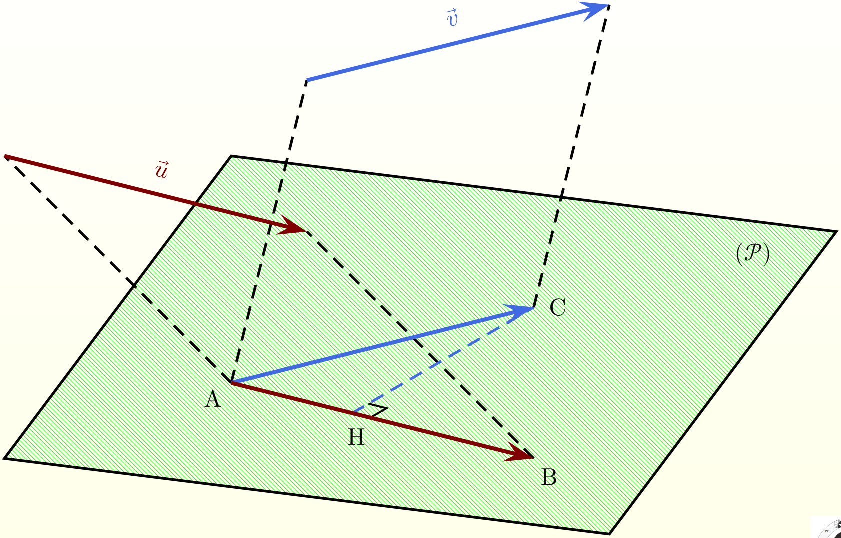



**Figure 6** – Produit scalaire dans l'espace.

**Remarque** : $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris entre 0 et $\pi$.

**Remarque** : $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris entre 0 et $\pi$.

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramenant au produit scalaire de ces deux vecteurs dans un plan, le produit scalaire conserve ses propriétés, en particulier la bilinéarité et la symétrie :

$\forall\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}},\ \forall\ (\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2,$

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}.$

**Remarque** : $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris entre 0 et $\pi$.

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramenant au produit scalaire de ces deux vecteurs dans un plan, le produit scalaire conserve ses propriétés, en particulier la bilinéarité et la symétrie :

$\forall\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}},\ \forall\ (\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2,$

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}.$
2. $$\vec{u}.(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u}.\vec{v} + \beta\vec{u}.\vec{w}$$
   $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}).\vec{w} = \alpha\vec{u}.\vec{w} + \beta\vec{v}.\vec{w}$

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère **orthonormé** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

**Proposition 2 :**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'. \tag{P.S 3}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère **orthonormé** $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Proposition 2 :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'. \tag{P.S 3}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

En particulier,

$$\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2 + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})^2}.$$

**Exercice 2 :**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{6}\vec{j} - \vec{k}$.

Déterminer une mesure de l'angle non orienté $(\vec{a}, \vec{b})$

Une fois choisis deux vecteurs unitaires et orthogonaux $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de l'espace, il reste deux possibilités pour compléter la base orthonormée, comme l'indique les deux schémas ci-dessous dans lesquels $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ sont des vecteurs unitaires orthogonaux aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

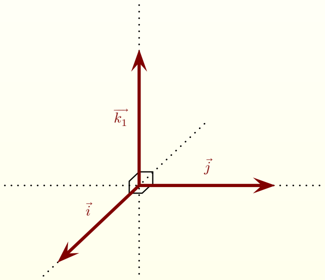



**Figure 7** – Base directe

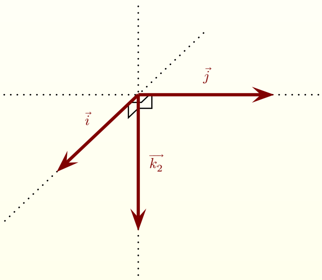



**Figure 8** – Base indirecte

**Figure 9** – Bases orthonormées de l'espace.

On convient de dire que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\overrightarrow{k_1}\right)$ est directe alors que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\overrightarrow{k_2}\right)$ est indirecte. Plusieurs moyens pour s'en souvenir :

- Bonhomme d'Ampère : adossé à $\overrightarrow{k_1}$, il a son pied droit sur $\vec{i}$ et son pied gauche sur $\vec{j}$.

On convient de dire que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\overrightarrow{k_1}\right)$ est directe alors que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\overrightarrow{k_2}\right)$ est indirecte.
Plusieurs moyens pour s'en souvenir :

- Bonhomme d'Ampère : adossé à $\overrightarrow{k_1}$, il a son pied droit sur $\vec{i}$ et son pied gauche sur $\vec{j}$.
- Règle des « trois doigts » : le pouce de la main droite sur $\vec{i}$, l'index sur $\vec{j}$ et le majeur sur $\overrightarrow{k_1}$.

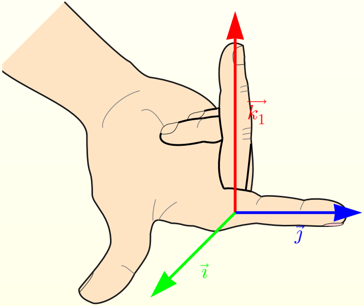



**Figure 10** – Règle des trois doigts pour orienter l'espace de manière directe (avec la main droite !!!!)

**Proposition 3 :**

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.

**Proposition 3 :**

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.

**Proposition 3 :**

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.
- Si on effectue une permutation circulaire sur les vecteurs, la base ne change pas d'orientation.

**Proposition 3 :**

Soit $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.
- Si on effectue une permutation circulaire sur les vecteurs, la base ne change pas d'orientation.

**Remarque** : Ces notions restent applicables à toute base de l'espace, même si elle n'est pas orthonormale.

Il n'est pas possible de définir un produit mixte de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaitre un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs.

Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le produit mixte est le produit vectoriel.

Il n'est pas possible de définir un produit mixte de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaitre un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs.

Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le produit mixte est le produit vectoriel.

**Définition 7 (Produit vectoriel) :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

On appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur défini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\vec{k} & \text{sinon où } \vec{k} \text{ est unitaire et directement orthogonal à } (\vec{u}\,;\vec{v}) \end{cases} \tag{P.V 1}$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris strictement entre $0$ et $\pi$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris strictement entre $0$ et $\pi$.

En particulier, $\sin\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})} > 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a la même direction et le même sens que $\vec{k}$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris strictement entre $0$ et $\pi$.

En particulier, $\sin\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})} > 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a la même direction et le même sens que $\vec{k}$.

**Corollaire 1 :**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris strictement entre 0 et $\pi$.

En particulier, $\sin(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) > 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a la même direction et le même sens que $\vec{k}$.

**Corollaire 1 :**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace.

**Remarque** : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est toujours l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

**Exercice 3 :**

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Déterminer $\vec{i}\wedge\vec{j}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}$ et $\vec{j}\wedge\vec{k}$.

**Proposition 4 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (Le produit vectoriel est anti-symétrique).

**Proposition 4 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (Le produit vectoriel est anti-symétrique).
2. $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w}$
   $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$
   (Le produit vectoriel est linéaire à gauche et à droite)

**Proposition 4 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (Le produit vectoriel est anti-symétrique).
2. $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w}$
   $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$
   (Le produit vectoriel est linéaire à gauche et à droite)

On dit que l'application

$$\wedge : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}$$

est bilinéaire (2) alternée (1).

**ATTENTION**

Le produit vectoriel n'est pas associatif.

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \neq \vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{0} = \vec{0}.$$

De ce fait, l'écriture $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ n'a pas de sens.

**Exercice 4 :**

Soit A, B, C trois points de l'espace. Montrer que pour tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

**Proposition 5 :**

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} yz'-y'z \\ x'z-xz' \\ xy'-x'y \end{pmatrix}$.

**Proposition 5 :**

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} yz'-y'z \\ x'z-xz' \\ xy'-x'y \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right).$$

**Exemple 1 :**

On peut toujours calculer des aires de triangle à l'aide du produit vectoriel.

Par exemple, si A $(1\,;2\,;3)$, B $(-1\,;1\,;-1)$ et C $(0\,;2\,;4)$ alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ puis }\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-6\\-1\end{pmatrix}.$$

Enfin, $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

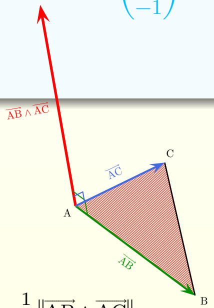



**Figure 11** – $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

Pour répondre définitivement à la non-associativité, on peut alors démontrer le résultat suivant :

**Corollaire 2 (Double produit vectoriel) :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right) \vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \vec{w}.$$

Pour répondre définitivement à la non-associativité, on peut alors démontrer le résultat suivant :

**Corollaire 2 (Double produit vectoriel) :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right) \vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \vec{w}.$$

Le vecteur $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$ appartient toujours au sous-espace engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puisqu'il est orthogonal à l'orthogonal de ce sous-espace. Ce vecteur est donc combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$. La formule du double produit vectoriel explicite les coefficients de cette combinaison sous forme de produits scalaires.

**Définition 8 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

On appelle déterminant ou produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}.$$

**Définition 8 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

On appelle déterminant ou produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$, noté $\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}\right)$, le réel :

$$\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}\right) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\overrightarrow{w}.$$

Par analogie avec le plan, le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est également noté $\left[\vec{u};\, \vec{v};\, \overrightarrow{w}\right]$ mais cette notation sera rapidement abandonnée à mesure que l'on gagnera en dimension de l'espace.

# IV. Déterminant de trois vecteurs

**Définition 8 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

On appelle déterminant ou produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}.$$

Par analogie avec le plan, le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est également noté $\left[\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}\right]$ mais cette notation sera rapidement abandonnée à mesure que l'on gagnera en dimension de l'espace.

**Exemple 2 :**

Si $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe alors

$$\det\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right) = \left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right).\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{k} = \left\|\vec{k}\right\|^2 = 1.$$

**Proposition 6 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ **non coplanaires**.

Alors, $|\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})|$ est l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

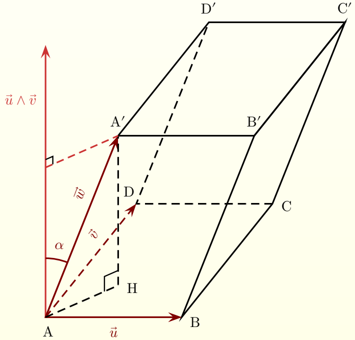



**Figure 12** – Volume d'un parallélépipède dans l'espace.

### Proposition 7 :

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix}$ alors

$$\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y" \\ z' & z" \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x" \\ z' & z" \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x" \\ y' & y" \end{vmatrix} \qquad (\det_{C_1})$$

$$= -x'\begin{vmatrix} y & y" \\ z & z" \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} x & x" \\ z & z" \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} x & x" \\ y & y" \end{vmatrix} \qquad (\det_{C_2})$$

$$= x"\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y"\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z"\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}. \qquad (\det_{C_3})$$

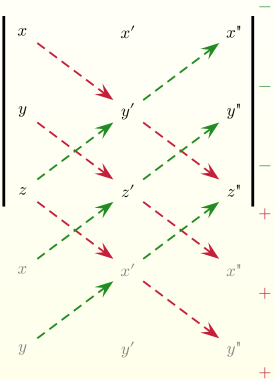
On dit que l'on a respectivement développé par rapport à la première, deuxième ou troisième colonne.

$$\begin{array}{ccc|l} x & x' & x" & \\ y & y' & y" & = xy'z" + yz'x" + zx'y" \\ z & z' & z" & \\ \hline x & x' & x" & + \\ y & y' & y" & + \\ & & & + \end{array}$$

Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme ci-contre :

- On additionne les trois produits obtenus le long des diagonales descendantes,

**Figure 13** – Règle de Sarrus



$$\begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix} = xy'z" + yz'x" + zx'y" - \left(zy'x" + xz'y" + yx'z"\right)$$

Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme ci-contre :

- On additionne les trois produits obtenus le long des diagonales descendantes,
- et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes.

**Figure 13** – Règle de Sarrus

**Corollaire 3 :**

Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\det\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right) = 1.$$

**Exercice 5 :**

Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs :

$$\vec{u}\,(1\,;2\,;-1),\ \vec{v}\,(-1\,;3\,;-1) \text{ et } \vec{w}\,(-8\,;1\,;0).$$

### Proposition 8 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\det\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}\right)=\alpha\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}\right)+\beta\det\left(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}\right)$.

### Proposition 8 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\det\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\alpha\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)+\beta\det\left(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)$.
   $\det\left(\vec{u}\,;\alpha\vec{v}+\beta\vec{r}\,;\vec{w}\right)=\alpha\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)+\beta\det\left(\vec{u}\,;\vec{r}\,;\vec{w}\right)$.

**Proposition 8 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\det\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\alpha\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)+\beta\det\left(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)$.
   $\det\left(\vec{u}\,;\alpha\vec{v}+\beta\vec{r}\,;\vec{w}\right)=\alpha\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)+\beta\det\left(\vec{u}\,;\vec{r}\,;\vec{w}\right)$.
   $\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{w}+\beta\vec{r}\right)=\alpha\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)+\beta\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{r}\right)$.

On dit que le déterminant est trilinéaire dans $\vec{\mathcal{E}}$.

**Proposition 8 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\det(\alpha\vec{u}+\beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$.
   $\det(\vec{u}\,;\alpha\vec{v}+\beta\vec{r}\,;\vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{r}\,;\vec{w})$.
   $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{w}+\beta\vec{r}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{r})$.

On dit que le déterminant est trilinéaire dans $\vec{\mathcal{E}}$.

2. $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{w}\,;\vec{u}\,;\vec{v}) = \det(\vec{v}\,;\vec{w}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.

**Proposition 8 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\det(\alpha\vec{u}+\beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$.
   $\det(\vec{u}\,;\alpha\vec{v}+\beta\vec{r}\,;\vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{r}\,;\vec{w})$.
   $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{w}+\beta\vec{r}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{r})$.

On dit que le déterminant est trilinéaire dans $\vec{\mathcal{E}}$.

2. $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{w}\,;\vec{u}\,;\vec{v}) = \det(\vec{v}\,;\vec{w}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.

3. $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{u}\,;\vec{w}\,;\vec{v}) = -\det(\vec{w}\,;\vec{v}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est anti-symétrique.

**Proposition 8 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient $\alpha$ et $\beta$ des réels.

Alors :

1. $\det(\alpha\vec{u}+\beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$.
   $\det(\vec{u}\,;\alpha\vec{v}+\beta\vec{r}\,;\vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{r}\,;\vec{w})$.
   $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{w}+\beta\vec{r}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{r})$.

On dit que le déterminant est trilinéaire dans $\vec{\mathcal{E}}$.

2. $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{w}\,;\vec{u}\,;\vec{v}) = \det(\vec{v}\,;\vec{w}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.

3. $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{u}\,;\vec{w}\,;\vec{v}) = -\det(\vec{w}\,;\vec{v}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est anti-symétrique.

Le déterminant change donc de signe si l'on échange deux vecteurs.

**Théorème 9 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$. Alors,

$$\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires si, et seulement si } \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0.$$

**Théorème 9 :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$. Alors,

$$\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires si, et seulement si } \det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}\right) = 0.$$

**Exercice 6 :**

Soient $\vec{u}(-1,1,1), \vec{v}(3,1,2), \vec{w}(1,1,2)$ trois vecteurs de l'espace.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont-ils coplanaires ? Si non forment-ils une base directe ?

À retenir :

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ un des des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ est nul} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ deux des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont égaux} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ deux des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ un des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ est combinaison} \\ \text{linéaire des deux autres} \end{array} \right. \text{, alors } \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0.$$

**À retenir :**

Si
- un des des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nul

ou
- deux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux

ou
- deux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

ou
- un des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est combinaison linéaire des deux autres

, alors $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0$.

L'application

$$\det : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) & \longmapsto & \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) \end{array}$$

est une forme trilinéaire alternée.

**Exercice 7 :**

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

1. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|.$$

**Exercice 7 :**

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

1. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|.$$

2. Montrer l'identité de Lagrange :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|(\vec{u} \wedge \vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

# V. Droites et plans de l'espace

## 1. Représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

**Proposition 10 (Droite) :**

Soient $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}}) \in \mathcal{E}$ et $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \in \vec{\mathcal{E}}$ un vecteur non nul.

La droite $(\mathcal{D}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + \alpha t \\ y = y_{\mathrm{A}} + \beta t \\ z = z_{\mathrm{A}} + \gamma t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

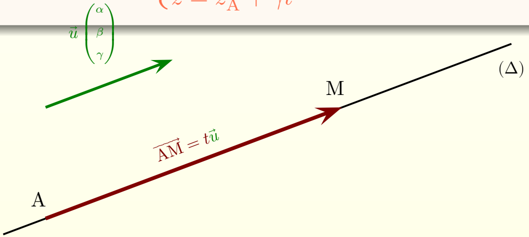



**Figure 14** – Équations paramétriques d'une droite.

Remarques :

- Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ représentent les coordonnées d'un point $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ quelconque qui appartiendrait à la droite $(\mathcal{D})$.
  Les points de la droite $(\mathcal{D})$ sont alors obtenus en faisant varier le paramètre $t$ dans $\mathbb{R}$.

**Remarques :**

- Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ représentent les coordonnées d'un point $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ quelconque qui appartiendrait à la droite $(\mathcal{D})$.
  Les points de la droite $(\mathcal{D})$ sont alors obtenus en faisant varier le paramètre $t$ dans $\mathbb{R}$.
- En particulier, le couple $(\mathrm{A}, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathcal{D})$. Le paramètre $t$ est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.

**Remarques :**

- Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ représentent les coordonnées d'un point $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ quelconque qui appartiendrait à la droite $(\mathcal{D})$.
  Les points de la droite $(\mathcal{D})$ sont alors obtenus en faisant varier le paramètre $t$ dans $\mathbb{R}$.
- En particulier, le couple $(\mathrm{A}, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathcal{D})$. Le paramètre $t$ est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.
- Pourquoi appeler le paramètre $t$ ?
  Tout simplement pour faire référence à la physique où un mobile $\mathrm{M}(t)$ sera représenté à tout instant $t$ par ses coordonnées, dépendantes elles-mêmes de $t$, par ses « équations-horaires » :

$$\mathrm{M}(t)\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{A}} + t\alpha \\ y(t) = y_{\mathrm{A}} + t\beta \\ z(t) = z_{\mathrm{A}} + t\gamma \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

**Remarques :**

- En particulier, le couple $(\mathrm{A}, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathcal{D})$. Le paramètre $t$ est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.
- Pourquoi appeler le paramètre $t$ ?
  Tout simplement pour faire référence à la physique où un mobile $\mathrm{M}(t)$ sera représenté à tout instant $t$ par ses coordonnées, dépendantes elles-mêmes de $t$, par ses « équations-horaires » :

$$\mathrm{M}(t)\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{A}} + t\alpha \\ y(t) = y_{\mathrm{A}} + t\beta \\ z(t) = z_{\mathrm{A}} + t\gamma \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

- Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par $t \in [\alpha\,;+\infty[$ ou $t \in ]-\infty\,;\alpha[$, par exemple, pour des demies-droites fermée et ouverte respectivement.
  Pour un segment il suffira de remplacer $t \in \mathbb{R}$ par $t \in [a\,;b]$.
- Enfin, avec une notation plus orientée algèbre linéaire,

$$(\mathcal{D}) = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\,(\vec{u})\,.$$

**Proposition II (Plan) :**

Soit $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A}) \in \mathcal{E}$ un point et soient $\vec{u}\,(\alpha_1\,;\beta_1\,;\gamma_1)$ et $\vec{v}\,(\alpha_2\,;\beta_2\,;\gamma_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathcal{E}}$.

Le plan $(\mathcal{P}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$, passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour représentation paramétrique : représentation paramétrique, de la forme :

$$(\mathcal{P}) = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\,(\vec{u};\,\vec{v}) : \begin{cases} x = x_\mathrm{A} + t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_\mathrm{A} + t\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_\mathrm{A} + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases},\ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

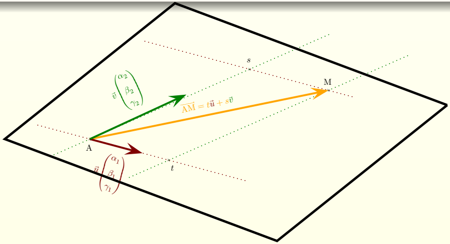



**Figure 15** – Équations paramétriques d'un plan.

**Proposition 12 :**

Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$. Soit $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A}) \in \mathcal{E}$ un point et soient $\vec{u}\,(\alpha_1\,;\beta_1\,;\gamma_1)$ et $\vec{v}\,(\alpha_2\,;\beta_2\,;\gamma_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathcal{E}}$.

Le plan $(\mathcal{P})$ passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - x_\mathrm{A} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_\mathrm{A} & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_\mathrm{A} & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Proposition 13 :**

Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque de $\mathcal{E}$.

1. Tout plan $(\mathcal{P})$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.
   Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.

**Proposition 13 :**

Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque de $\mathcal{E}$.

1. Tout plan $(\mathcal{P})$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.
   Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.
2. Réciproquement, soit $(a;\ b;\ c;\ d)\in\mathbb{R}^4$ tels que $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ alors l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax+by+cz+d=0$ est un plan $(\mathcal{P})$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de l'espace appartiendra donc au plan $(\mathcal{P})$ si, et seulement si ses coordonnées sont solutions de l'équation à 3 inconnues $ax+by+cz+d=0$.

Un point M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace appartiendra donc au plan $(\mathcal{P})$ si, et seulement si ses coordonnées sont solutions de l'équation à 3 inconnues $ax + by + cz + d = 0$.

**Remarque** : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients $a$, $b$ et $c$ par un facteur $k$ non nul *i.e.* remplacer le vecteur normal $\vec{n}$ par un vecteur qui lui est colinéaire.

**Exemple 3 :**

Les Plans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(O; \vec{i}; \vec{k})$ et $(O; \vec{j}; \vec{k})$ passant par $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur normal respectif $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ont, respectivement, comme équation $z = 0$, $y = 0$ et $x = 0$.

**Exercice 8 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

1. passant par $\mathrm{A}(1,-1,2)$ et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(2,0,1)$ et $\vec{v}(2,1,0)$.

### Exercice 8 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

1. passant par $\mathrm{A}(1,-1,2)$ et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(2,0,1)$ et $\vec{v}(2,1,0)$.
2. passant par les points $\mathrm{B}(-1,1,1), \mathrm{C}(1,-1,1)$ et $\mathrm{D}(1,1,-1)$.

**Exercice 8 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

1. passant par $\mathrm{A}(1,-1,2)$ et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(2,0,1)$ et $\vec{v}(2,1,0)$.
2. passant par les points $\mathrm{B}(-1,1,1), \mathrm{C}(1,-1,1)$ et $\mathrm{D}(1,1,-1)$.
3. passant par C et normal au vecteur $\vec{u}$.

**Définition 9 (Équation normale d'un plan) :**

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels tels que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ et $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

L'équation est dite normale si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ *i.e.* $\|\vec{n}\| = 1$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

**Théorème 14 :**

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

**Théorème 14 :**

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A est un point quelconque de $(\mathcal{P})$ :

**Théorème 14 :**

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A est un point quelconque de $(\mathcal{P})$ :
  - Si $\mathrm{A} \in (\mathcal{P}')$, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus.

**Théorème 14 :**

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A est un point quelconque de $(\mathcal{P})$ :
  - Si $\mathrm{A} \in (\mathcal{P}')$, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus.
  - Si $\mathrm{A} \notin (\mathcal{P})$, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles.

**Théorème 14 :**

Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$ dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A est un point quelconque de $(\mathscr{P})$ :
  - Si $\mathrm{A} \in (\mathscr{P}')$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont confondus.
  - Si $\mathrm{A} \notin (\mathscr{P})$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont strictement parallèles.
- $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

Ainsi,

$$\boxed{(\mathscr{P}) \mathbin{/\!/} (\mathscr{P}') \iff \vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}') \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0.}$$

**Petite remarque en passant** : deux droites contenues dans des plans perpendiculaires ne sont pas nécessairement perpendiculaires (elles peuvent être parallèles), et deux droites incluses dans des plans parallèles ne sont pas forcément parallèles (elles peuvent être orthogonales).

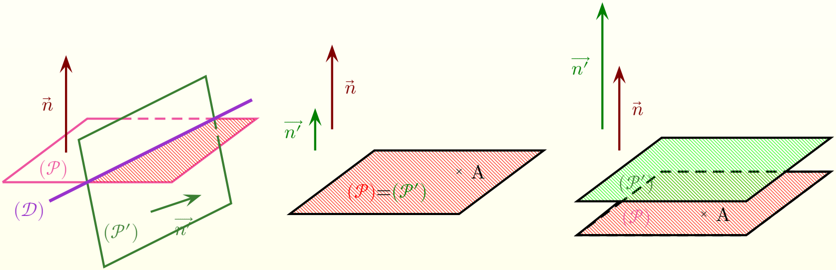



**Table 1** – Position relative de plans.

Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ n'est pas représentée par une seule équation cartésienne mais par deux : celles de deux plans sécants dont elle est l'intersection.
Plus précisément, en posant

$$\begin{cases} (\mathcal{P}) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \\ (\mathcal{P}') : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ n'est pas représentée par une seule équation cartésienne mais par deux : celles de deux plans sécants dont elle est l'intersection.
Plus précisément, en posant

$$\begin{cases} (\mathcal{P}) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \\ (\mathcal{P}') : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Si $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \neq \vec{0}$ alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$ dont un système d'équations cartésienne est :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 9 :**

Soit $\mathrm{A}\,(0\,;-1\,;4)$ et $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 3+t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$.

Déterminer une équation cartésienne du plan contenant A et $(\mathcal{D})$.

# VI. Distance

**Définition 10 (Projeté orthogonal sur un plan) :**

Soient un plan $(\mathcal{P})$ de vecteur normal $\vec{n}$ et un point A de l'espace.

On appelle projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$, l'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A.

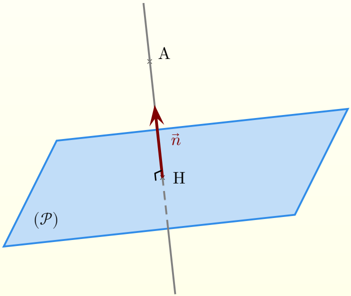



**Figure 16** – H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.

**Méthode 1 :**

Soient $(\mathcal{P})$ un plan et A un point de l'espace.

1. On détermine un vecteur normal au plan.

**Méthode 1 :**

Soient $(\mathcal{P})$ un plan et $\mathrm{A}$ un point de l'espace.

1. On détermine un vecteur normal au plan.
2. On trouve une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ perpendiculaire au plan passant par $\mathrm{A}$.

**Méthode 1 :**

Soient $(\mathcal{P})$ un plan et $A$ un point de l'espace.

1. On détermine un vecteur normal au plan.
2. On trouve une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ perpendiculaire au plan passant par $A$.
3. On trouve le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et de $(\mathcal{P})$.

**Exercice 10 :**

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$.

1. $\mathrm{A}\,(1\,;-1\,;0)$ et $(\mathcal{P}) :\ 2x - y - 16 = 0$.

**Exercice 10 :**

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$.

1. $A\,(1\,;-1\,;0)$ et $(\mathcal{P})$ : $2x - y - 16 = 0$.
2. $A\,(2\,;1\,;3)$ et $(\mathcal{P})$ : $x + y + z = 0$.

**Définition II (Projeté orthogonal sur une droite) :**

Soient une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A de l'espace.

On appelle projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$, l'intersection de la droite $(\mathcal{D})$ et du plan de vecteur normal $\vec{u}$ et passant par A.

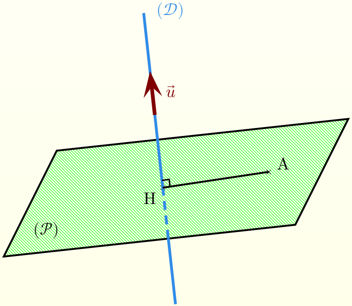



**Figure 17** – H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

**Définition 12 :**

Soient $(\mathcal{P})$ un plan et A un point de l'espace.

On appelle distance de A à $(\mathcal{P})$, notée $d\,(\mathrm{A}\,;(\mathcal{P}))$, la plus petite des longueurs AM où $\mathrm{M} \in (\mathcal{P})$.

$$d\,(\mathrm{A}\,;(\mathcal{P})) = \min\left\{\mathrm{AM},\ \mathrm{M} \in (\mathcal{P})\right\}.$$

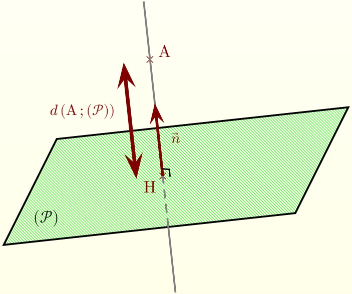



**Figure 18** – $d\,(\mathrm{A}\,;(\mathcal{P})) = \mathrm{AH}$.

**Théorème 15 :**

Soient $(\mathcal{P})$ un plan et A un point de l'espace.

Si H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$ alors $d\left(\mathrm{A}\,;(\mathcal{P})\right) = \mathrm{AH}$.

**Proposition 16 :**

Soient $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque et $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$.

**Cas d'un plan défini par un point et un vecteur normal :** Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{M}\,;(\mathcal{P})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}. \tag{3}$$

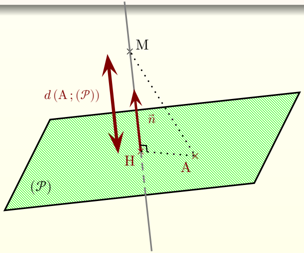



**Figure 19** – Distance d'un point à un plan.

**Proposition 16 :**

Soient $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque et $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$.

**Cas d'un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs :** Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note $(\mathcal{P}) = \mathrm{A} + \operatorname{vect} \vec{u}; \vec{v}$.

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{M}\,;(\mathcal{P})\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right]\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

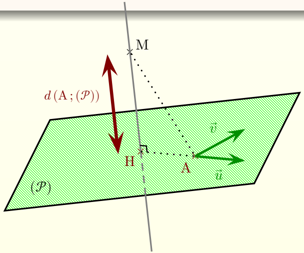



**Figure 19** – Distance d'un point à un plan.

**Exercice ll :**

Calculer la distance du point B$(1;1;1)$ au plan $\mathcal{Q}$ représenté par le paramétrage :

$$\begin{cases} x &= 2+s+t \\ y &= 3-s+2t \\ z &= 1+2s+t \end{cases} \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

**Corollaire 4 ( Cas d'un plan défini par une équation cartésienne dans un RON ) :**

Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ où $a$, $b$, $c$, $d\in\mathbb{R}$ et $(a\,;b\,;c)\,(0\,;0\,;0)$.

Pour tout point $\mathrm{M}\,(x_{\mathrm{M}}\,;y_{\mathrm{M}}\,;z_{\mathrm{M}})\in\mathcal{E}$, on a :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathcal{P}))=\frac{|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

**Exercice 12 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $A(1,-2,3)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-4z-6=0$.

**Exercice 12 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $A(1,-2,3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y-4z-6=0$.
2. Déterminer la distance du point $B(1,1,1)$ au plan $\mathcal{Q}$ représenté par la paramétrage :

$$\begin{cases} x = 2+\lambda+\mu \\ y = 3-\lambda+2\mu \\ z = 1+2\lambda+\mu \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

**Proposition 17 :**

Soient A, M $\in \mathcal{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ non nul. On considère la droite $(\mathcal{D}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u}$.

$$d\left(\mathrm{M}\,;(\mathcal{D})\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

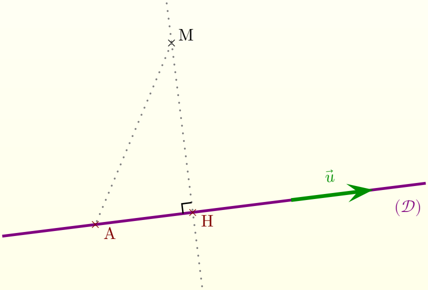



**Figure 20** – Distance d'un point à une droite.

**Exercice 13 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $\mathrm{A}(1,-2,3)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $\mathrm{C}(0,1,2)$, dirigée par $\vec{u}(4,3,1)$.

**Exercice 13 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $\mathrm{A}(1,-2,3)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $\mathrm{C}(0,1,2)$, dirigée par $\vec{u}(4,3,1)$.
2. Déterminer la distance du point $\mathrm{E}(1,0,-1)$ à la droite $\mathcal{D}'$ donnée par le système d'équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ -x+2y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

## VII. Sphères

# VII. Sphères

Dans ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé.

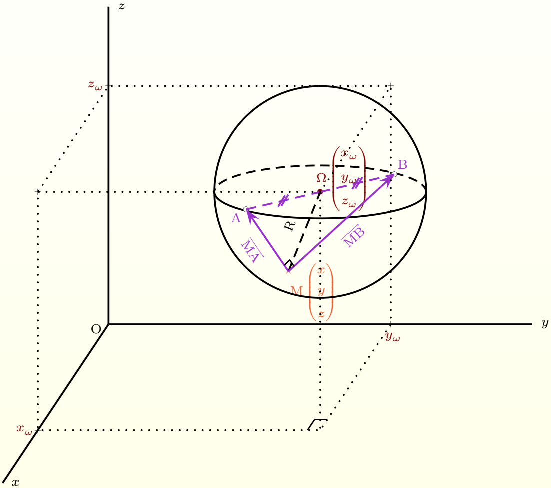



**Figure 21** – Sphère de l'espace.

**Proposition 18 :**

Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega) \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in \mathcal{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

**Proposition 18 :**

Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega) \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in \mathcal{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

La sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ et de rayon R, ou la sphère de diamètre [AB] est aussi l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant :

$$\Omega\mathrm{M} = \mathrm{R} \iff \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0.$$

**Remarques** : On appelle boule de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)\ /\ (x-x_\omega)^2 + (y-y_\omega)^2 + (z-z_\omega)^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}.$$

Plus particulièrement,

- $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est strictement à l'extérieur de la sphère $\mathcal{S} \iff (x-x_\omega)^2 + (y-y_\omega)^2 + (z-z_\omega)^2 > \mathrm{R}^2$.

**Remarques** : On appelle boule de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)\ /\ (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}.$$

Plus particulièrement,

- $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est strictement à l'extérieur de la sphère $\mathcal{S} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 > \mathrm{R}^2$.
- $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est strictement à l'intérieur de la sphère $\mathcal{S} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 < \mathrm{R}^2$.

**Exercice 14 :**

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$

**Exercice 14 :**

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

1. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-10=0$
2. $x^2+y^2+z^2+y-2z+3=0$

**Exercice 14 :**

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$
3. $4y - 4x + 4z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$

**Exercice 14 :**

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$
3. $4y - 4x + 4z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = 0$

### Exercice 14 :

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$
3. $4y - 4x + 4z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = 0$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$

**Proposition 19 :**

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels et $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

- Si $d < a^2 + b^2 + c^2$ alors $s$ est la sphère de centre $\Omega\,(a\,;b\,;c)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

**Proposition 19 :**

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels et $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

- Si $d < a^2 + b^2 + c^2$ alors $s$ est la sphère de centre $\Omega\,(a\,;b\,;c)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- Si $d = a^2 + b^2 + c^2$ alors $\mathcal{S}$ est réduit au point $\Omega\,(a\,;b\,;c)$.

**Proposition 19 :**

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels et $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

- Si $d < a^2 + b^2 + c^2$ alors $s$ est la sphère de centre $\Omega\,(a\,;b\,;c)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- Si $d = a^2 + b^2 + c^2$ alors $\mathcal{S}$ est réduit au point $\Omega\,(a\,;b\,;c)$.
- Si $d > a^2 + b^2 + c^2$ alors $\mathcal{S}$ est vide.

**Exercice 15 :**

Soient $A\,(1\,;2\,;3)$, $B\,(2\,;1\,;3)$, $C\,(3\,;1\,;2)$ et $D\,(1\,;0\,;-1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

### Proposition 20 :

Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$ et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{E}$.

1. Si $d(\Omega\,;(\mathcal{D})) < R$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts. On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.

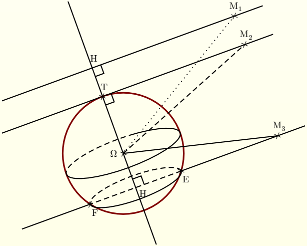



**Figure 22** – Intersection d'une sphère et d'une droite.

**Proposition 20 :**

Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$ et de rayon $\mathrm{R}$ et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{E}$.

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) < \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts.
   On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.
2. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) = \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un unique point.
   On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ sont tangents.

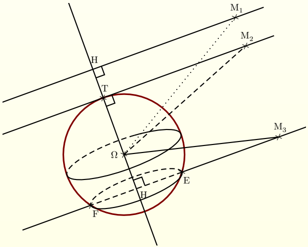



**Figure 22** – Intersection d'une sphère et d'une droite.

**Proposition 20 :**

Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$ et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{E}$.

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) < \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts. On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.
2. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) = \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un unique point. On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ sont tangents.
3. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) > \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S} \cap (\mathcal{D}) = \varnothing$. On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{D})$ sont extérieurs.

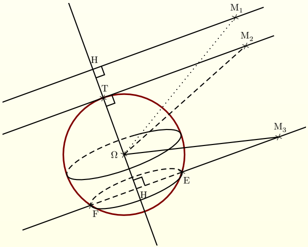



**Figure 22** – Intersection d'une sphère et d'une droite.

**Exercice 16 :**

Déterminer les points d'intersection de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $\begin{cases} x - 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ , $t \in \mathbb{R}$ et de la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$.

**Proposition 21 :**

Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$ et de rayon R et $(\mathcal{P})$ un plan de $\mathcal{E}$.

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{P})) < \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants
   Dans ce cas, $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P})$ est un cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{R}^2 - d^2}$ et de centre H, projeté orthogonal de $\Omega$ sur le plan $(\mathcal{P})$.

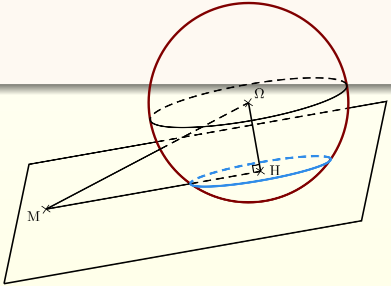



**Figure 23** – Intersection d'une sphère et d'un plan.

**Proposition 21 :**

Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$ et de rayon $\mathrm{R}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de $\mathcal{E}$.

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{P})) < \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants
   Dans ce cas, $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P})$ est un cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{R}^2 - d^2}$ et de centre H, projeté orthogonal de $\Omega$ sur le plan $(\mathcal{P})$.
2. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{P})) = \mathrm{R}$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ se coupent en un unique point.
   On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ sont tangents.

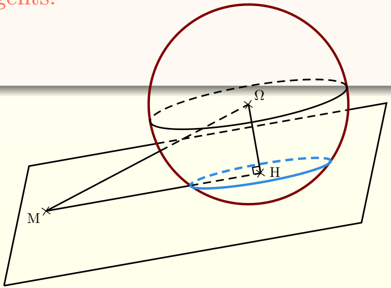



**Figure 23** – Intersection d'une sphère et d'un plan.

**Proposition 21 :**

Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$ et de rayon R et $(\mathcal{P})$ un plan de $\mathcal{E}$.

1. Si $d(\Omega\,;(\mathcal{P})) < R$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants
   Dans ce cas, $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P})$ est un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et de centre H, projeté orthogonal de $\Omega$ sur le plan $(\mathcal{P})$.
2. Si $d(\Omega\,;(\mathcal{P})) = R$ alors $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ se coupent en un unique point.
   On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ sont tangents.
3. Si $d(\Omega\,;(\mathcal{P})) > R$ alors $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P}) = \varnothing$.
   On dit que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ sont disjoints.

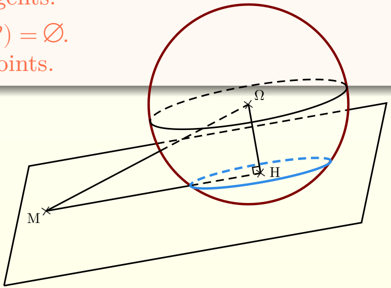



**Figure 23** – Intersection d'une sphère et d'un plan.

**Exercice 17 :**

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé.

Montrer que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ se coupent suivant un cercle dont on donnera le rayon, l'axe et le centre

1. $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ et $(\mathcal{P}) : x + y - 2z - 2 = 0.$

**Exercice 17 :**

L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé.

Montrer que $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{P})$ se coupent suivant un cercle dont on donnera le rayon, l'axe et le centre

1. $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ et $(\mathcal{P}) : x+y-2z-2=0.$
2. $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et $(\mathcal{P}) : x+y-2z-2=0.$

**Proposition 22 :**

Soient deux sphères $\mathcal{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathcal{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors : $$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \varnothing \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') \leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$

Plus précisément :

- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = \mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.

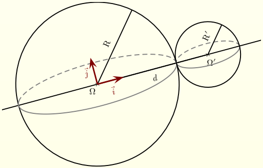



**Figure 24** – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

# VII. Sphères

## 4. Intersection de deux sphères

**Proposition 22 :**

Soient deux sphères $\mathcal{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathcal{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors : $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'\neq\varnothing \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|\leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')\leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

Plus précisément :

- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=\mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ alors les deux sphères sont tangentes intérieurement. Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.

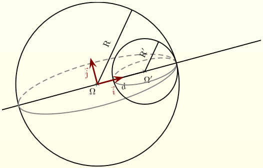



**Figure 25** – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=\left|\mathrm{R}-\mathrm{R}'\right|$.

**Proposition 22 :**

Soient deux sphères $\mathcal{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathcal{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors : $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \varnothing \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') \leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

Plus précisément :

- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = \mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ alors les deux sphères sont tangentes intérieurement. Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'| < \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') < \mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont sécantes. Leur intersection est un cercle d'axe $(\Omega\Omega')$.

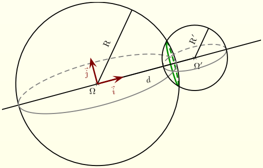



**Figure 26** – $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'| < \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') < \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

**Proposition 22 :**

Soient deux sphères $\mathcal{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathcal{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors : $$\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'\neq\varnothing \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|\leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')\leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$
Plus précisément :

- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=\mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ alors les deux sphères sont tangentes intérieurement. Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|<\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')<\mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont sécantes. Leur intersection est un cercle d'axe $(\Omega\Omega')$.

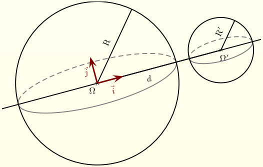



**Figure 27** – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')>\mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

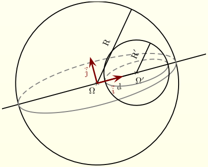



**Figure 28** – $0<\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')<|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$.