Fonctions de deux variables

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 34

Sommaire I

Pour ce dernier chapitre de l'année, nous allons faire un rapide survol des techniques d'étude et de calcul liées aux fonctions à deux variables que vous approfondirez l'an prochain. Au programme, des choses que vous avez pour la plupart déjà croisées en physique ou en SII : calcul de dérivées partielles, plan tangents, différentielles et un tout petit peu de champs de vecteurs.

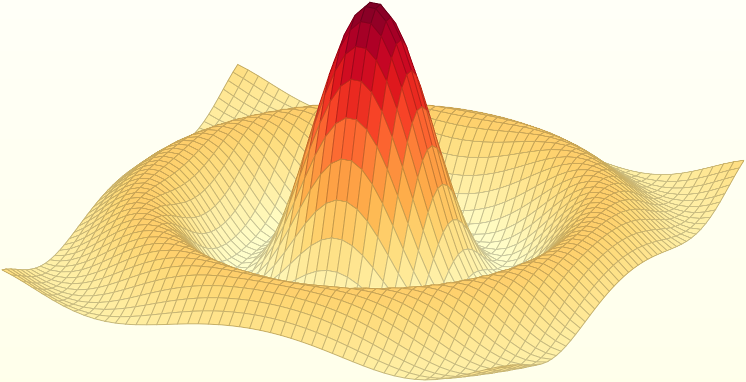


Figure 1 – Surface représentative de la fonction $r \longmapsto \dfrac{\sin(r)}{r}$.

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique.

Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

I. Approche graphique

Définition I :

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

On appelle fonction à deux variables toute fonction $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

Comme pour les fonctions de la variable réelle, Ω est appelé le domaine de définition de f.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Figure 2 – Fonction à une variable

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \sin(x)\sin(y) \end{array}$$

Figure 3 – Fonction à deux variables

Exercice 1 :

Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

1. $f : (x\,;y) \longmapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$.

Exercice 1 :

Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

1. $f : (x\,;y) \longmapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$.
2. $g : (x\,;y) \longmapsto \dfrac{1}{|x-y|}$.

Nous avons l'habitude de représenter toute fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par une courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$, précisément la courbe d'équation $y = f(x)$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ sera, quant à elle, représentée par une surface de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x\,;y)$.

Définition 2 (Surface représentative) :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle surface représentative de f l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\right\}$$

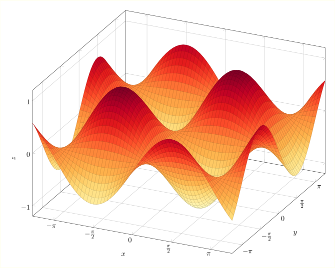


Figure 4 – $z = \sin(x)\sin(y)$

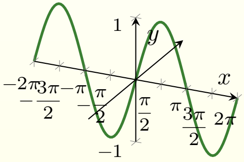


Figure 5 – $z = \sin(x)$

Définition 2 (Surface représentative) :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle surface représentative de f l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\right\}$$

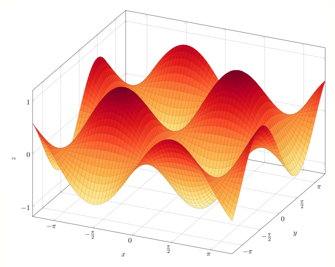


Figure 4 – $z = \sin(x)\sin(y)$

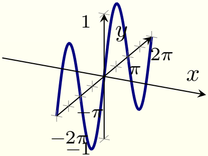


Figure 6 – $z = \sin(y)$

Définition 2 (Surface représentative) :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle surface représentative de f l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\right\}$$

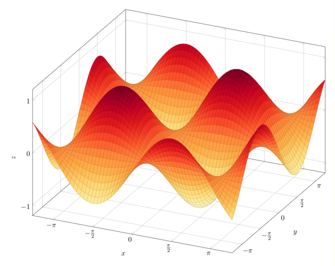


Figure 4 – $z = \sin(x)\sin(y)$

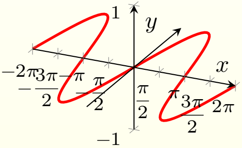


Figure 7 – $y = \sin(x)$

Intéressons-nous, par exemple, à la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 + \sin(3y)$.

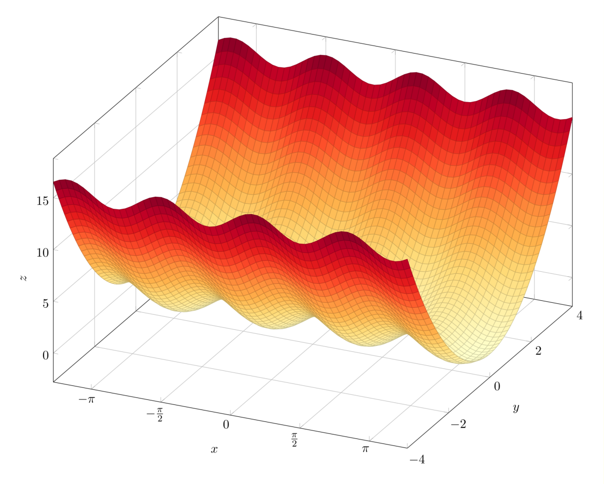


Figure 8 – $z = x^2 + \sin(3y)$

Pour construire son graphe $\mathcal{S}$, on étudie souvent son intersection avec une collection de plans parallèles qui balaient l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.
Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,

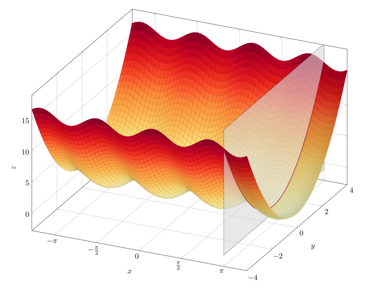


Figure 9 – Intersection de $\mathcal{S}$ avec $x = \pi$.

Pour construire son graphe $\mathcal{S}$, on étudie souvent son intersection avec une collection de plans parallèles qui balaient l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.
Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,
- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan,

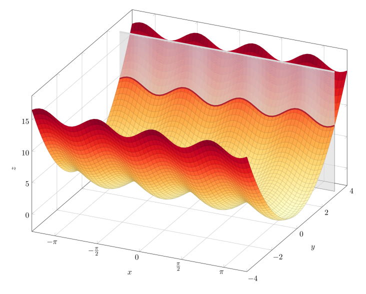


Figure 9 – Intersection de $\mathcal{S}$ avec $y = 2$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,
- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan,
- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z = \lambda$ est la courbe d'équation $x^2 + \sin(3y) = \lambda$ dans ce plan. Ces courbes particulières s'appelle des lignes de niveau λ de f (*confer* paragraphe (2)).

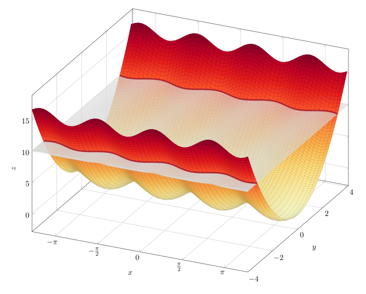


Figure 9 – Intersection de $\mathcal{S}$ avec $z = 10$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,
- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan,
- l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z = \lambda$ est la courbe d'équation $x^2 + \sin(3y) = \lambda$ dans ce plan. Ces courbes particulières s'appelle des lignes de niveau λ de f (*confer* paragraphe (2)).

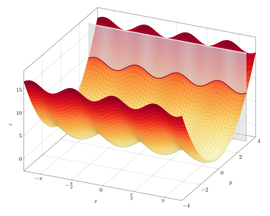


Figure 9 – Intersection de $\mathcal{S}$ avec $y = 2$.

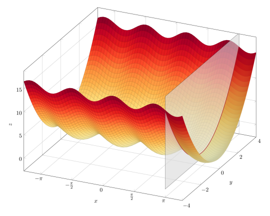


Figure 10 – Intersection de $\mathcal{S}$ avec $x = \pi$.

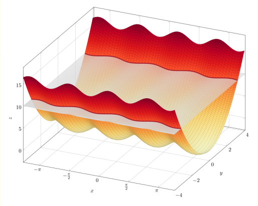


Figure 11 – Intersection de $\mathcal{S}$ avec $z = 10$.

Faites l'effort de réfléchir en les mêmes termes aux exemples qui suivent et assurez-vous de bien les comprendre.

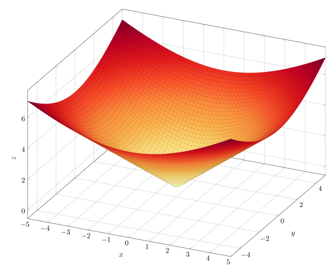


Figure 12 – $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

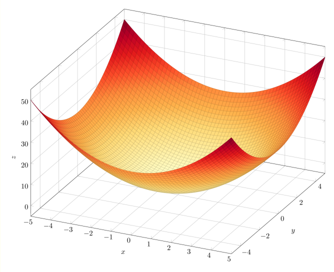


Figure 13 – $z = x^2 + y^2$.

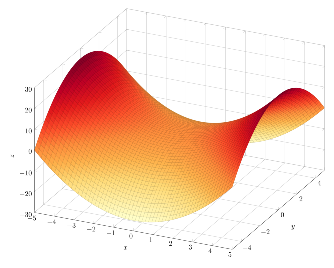


Figure 14 – $z = x^2 - y^2$.

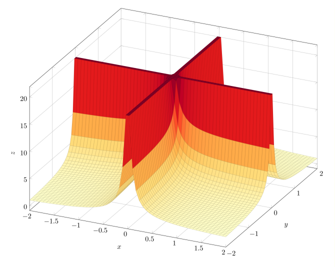


Figure 15 – $z = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|y|}$.

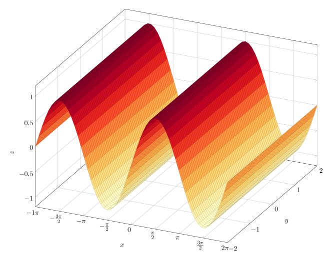


Figure 16 – $z = \sin(x)$.

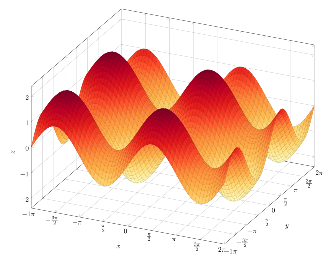


Figure 17 – $z = \sin(x) + \sin(y)$.

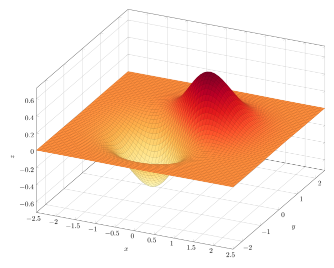


Figure 18 – $z = (x + y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

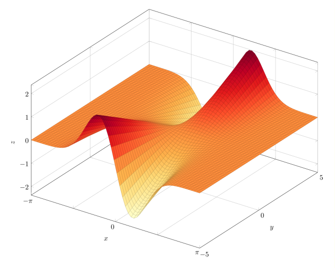


Figure 19 – $z = y\sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Définition 3 (Lignes de niveau) :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on appelle ligne de niveau k, ou courbe de niveau k, l'ensemble

$$\mathrm{L}_k = \{(x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = k\}.$$

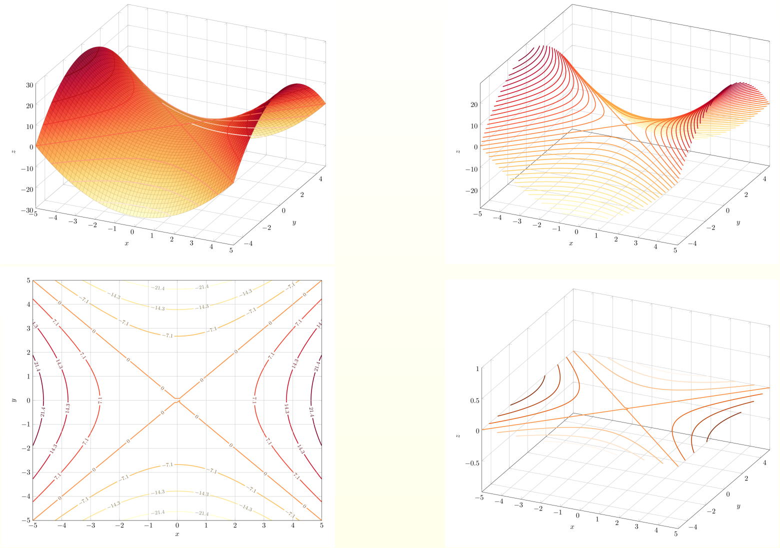


Figure 20 – Lignes de niveau de $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- La ligne de niveau 0 est constituée des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- La ligne de niveau 0 est constituée des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- La ligne de niveau 0 est constituée des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

De manière générale, toute courbe joignant des points d'égale valeur est appelée isoplèthe. Elle sépare des zones de faibles valeurs et des zones de valeurs plus élevées. Toutes les courbes iso-... que vous connaissez sont des isoplèthes.

Exemple 2 :

Si f est la fonction qui, à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte ni ne descend.

Ce sont ces lignes (dites de niveau) qui sont représentées sur les cartes topographiques.

Plus les courbes de niveau sont serrées, plus l'altitude varie rapidement, plus la pente est forte.

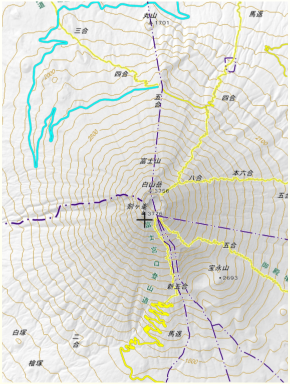


Figure 21 – Les lignes de niveau autour du mont Fuji

Exemple 3 :

Si f est la fonction qui, à la longitude et à la latitude associe la pression (au niveau de la mer), alors les lignes de niveau relient des points d'égale pression. Ces lignes sont appelées en météorologie des courbes isobares.

Lorsque les isobares forment des boucles fermées, la plus petite boucle au centre indique le centre de pression. Un système anticyclonique est représenté par un « H »en anglais et un système dépressionnaire est représenté par un « L »en anglais.

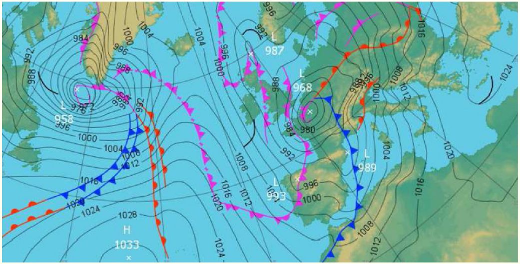


Figure 22 – Courbes isobares : La vitesse du vent est fonction de l'écartement des isobares : plus les isobares sont serrées, plus la pression varie rapidement, plus le vent souffle fort.

Définition 4 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(\cdot, y_0)$ ou f_{y_0} l'application $x \longmapsto f(x, y_0)$ qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x, y_0) \in \Omega$.

$$f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$$

Définition 4 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(\cdot, y_0)$ ou f_{y_0} l'application $x \longmapsto f(x, y_0)$ qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x, y_0) \in \Omega$.

$$f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$$

- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(x_0, \cdot)$ ou f_{x_0} l'application $y \longmapsto f(x_0, y)$ qui est définie sur l'ensemble des réels y tels que $(x_0, y) \in \Omega$.

$$f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$$

Définition 4 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(\cdot, y_0)$ ou f_{y_0} l'application $x \longmapsto f(x, y_0)$ qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x, y_0) \in \Omega$.

$$f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$$

- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(x_0, \cdot)$ ou f_{x_0} l'application $y \longmapsto f(x_0, y)$ qui est définie sur l'ensemble des réels y tels que $(x_0, y) \in \Omega$.

$$f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$$

$f(\cdot, y_0)$ et $f(x_0, \cdot)$ sont appelées applications partielles de f en (x_0, y_0).

Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = x_0$ et $x = x_0$. *confer* paragraphe (1) .

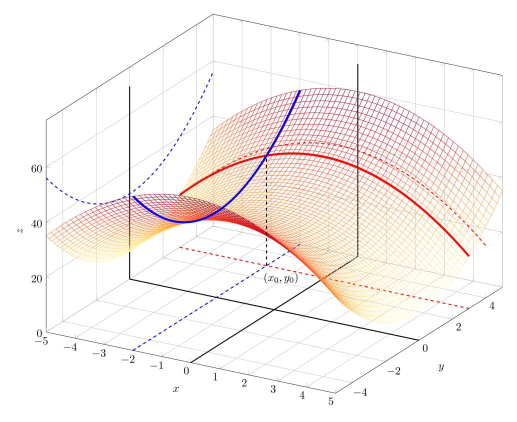


Figure 23 – $(x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 - y^2$ avec ses fonctions partielles $f_{x_0} : (x_0, y) \longmapsto f(x_0, y)$ et $f_{y_0} : (x, y_0) \longmapsto f(x, y_0)$.

Exemple 4 :

Considérons la fonction $z \longmapsto x^2 - y^2$ et $(x_0\,;y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Les fonctions partielles sont des paraboles de concavité contraire :

$$x \longmapsto x^2 - y_0^2 \quad \text{et} \quad y \longmapsto -y^2 + x_0^2.$$

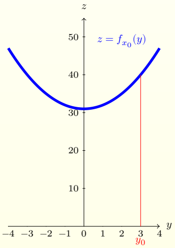


Figure 24 – $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$

Exemple 4 :

Considérons la fonction $z \longmapsto x^2 - y^2$ et $(x_0\,;y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Les fonctions partielles sont des paraboles de concavité contraire :

$$x \longmapsto x^2 - y_0^2 \quad \text{et} \quad y \longmapsto -y^2 + x_0^2.$$

- Les lignes de niveau $k \in \mathbb{R}$ sont des hyperboles d'équation $x^2 - y^2 = k$ ou les deux bissectrices lorsque $k = 0$.

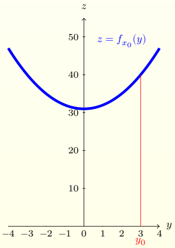


Figure 24 – $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$

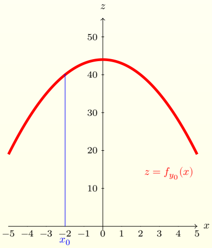


Figure 25 – $f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$

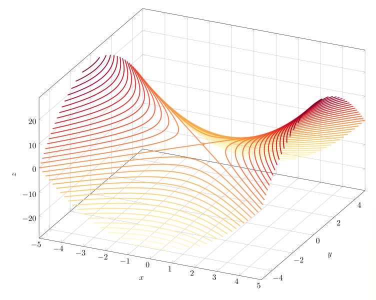


Figure 27 – Lignes de niveau de $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

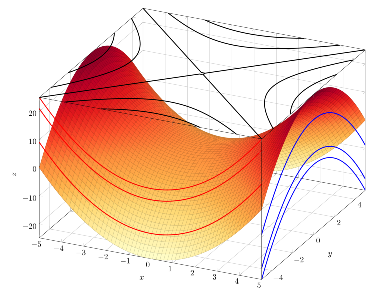


Figure 28 – Différences entre fonctions partielles et lignes de niveau de $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Exemple 5 :

Considérons la fonction $f : (x\,;y) \longmapsto x^2 + y^2$.

- l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $f_{y,1} : x \longmapsto x^2 + 1$.
- l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $f_{x,2} : y \longmapsto y^2 + 4$.
- Les applications partielles sont toutes représentées par des paraboles.
  En particulier, à l'origine, elles ont pour équation $x \longmapsto x^2$ et $y \longmapsto y^2$.
- Les lignes de niveau sont des cercles.

Remarque : Les courbes des applications partielles et les lignes de niveau permettent de reconstituer l'intégralité de la surface. Par exemple, la figure (29) s'appelle un *paraboloïde hyperbolique* tandis que la figure (30) est un *paraboloïde de révolution*.

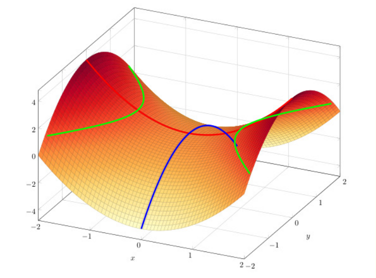


Figure 29 – $z = x^2 - y^2$.

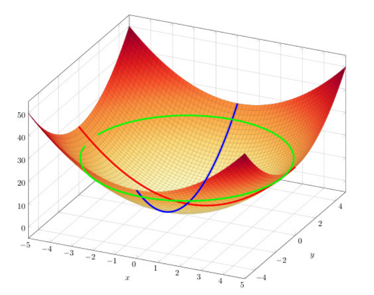


Figure 30 – $z = x^2 + y^2$.

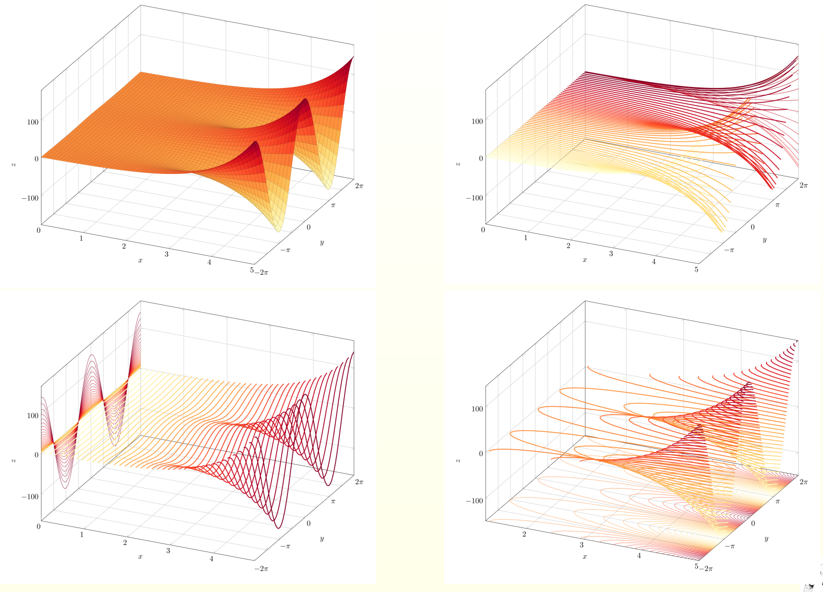


Figure 31 – Différence entre fonctions partielles et lignes de niveau.

Exercice 2 (Applications partielles) :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^x \cos(y). \end{array}$

Déterminer $f(\cdot, 0)$ et $f(3, \cdot)$.

L'idée essentielle, si nous voulons faire un peu d'analyse, est de pouvoir définir la notion de limite d'une fonction en un point.

Globalement, pouvoir exprimer rigoureusement le fait que $f(x)$ peut être « aussi proche » de ℓ que ce que l'on veut à condition que x soit « assez proche » de x_0, ce que nous écrivons

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ s'écrivait :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \quad \left\{ \begin{array}{c} |x - x_0| < \alpha \\ \text{ou} \\ x \in \,]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(x_0\,; x) < \alpha \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ \text{ou} \\ f(x) \in \,]\ell - \varepsilon\,; \ell + \varepsilon[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(\ell\,; f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

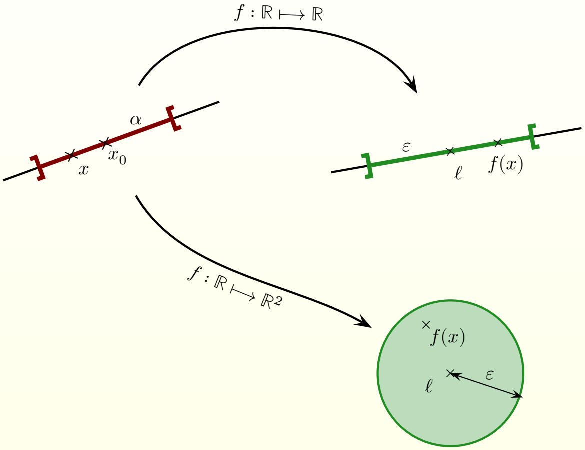


Figure 32 – Fonction à une variable à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

- Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, nous avons tout d'abord eu recours au module et les expressions ci-dessus restent inchangées :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\quad \left\{ \begin{array}{c} |x - x_0| < \alpha \\ \text{ou} \\ x \in \left]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha\right[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(x_0\,; x) < \alpha \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} |f(x) - \ell|_{\mathbb{C}} < \varepsilon \\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(\ell\,; f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

- Nous pouvons aussi munir $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique *i.e.*

- Nous pouvons aussi munir $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique *i.e.*
  - de son produit scalaire :

$$(\cdot|\cdot) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & (\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy', \end{array}$$

- Nous pouvons aussi munir $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique *i.e.*
  - de son produit scalaire :

$$\begin{array}{rccl} (\cdot|\cdot) : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & (\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy', \end{array}$$

  - et de sa norme associée :

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \|\vec{u}\|_2 = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})} = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{array}$$

II. Rudiments de topologie dans $\mathbb{R}^2$

- Nous pouvons aussi munir $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique *i.e.*
  - de son produit scalaire :

$$
\begin{array}{rccl}
(\cdot|\cdot) : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \left(\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & (\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy',
\end{array}
$$

  - et de sa norme associée :

$$
\begin{array}{rccl}
\|\cdot\|_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\
& \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \|\vec{u}\|_2 = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})} = \sqrt{x^2 + y^2}.
\end{array}
$$

On identifiera souvent le vecteur $\vec{u}\,(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ avec le point M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ *i.e.* on confond $\mathbb{R}^2$ avec le plan affine $\mathcal{P}$ si bien qu'on notera fréquemment $\mathrm{M} = (x\,;y)$.

La norme euclidienne permet également de définir une distance sur $\mathbb{R}^2$ appelée distance euclidienne :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}_2 : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \|\vec{u}-\vec{v}\|_2\,. \end{array} \iff \begin{array}{rccc} \mathrm{d}_2 : & \mathcal{P} \times \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (\mathrm{M}\,;\mathrm{M}') & \longmapsto & \|\mathrm{M}-\mathrm{M}'\|_2 = \mathrm{MM}'. \end{array}$$

La norme euclidienne permet également de définir une distance sur $\mathbb{R}^2$ appelée distance euclidienne :

$$\mathrm{d}_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \|\vec{u}-\vec{v}\|_2\,. \end{array} \iff \mathrm{d}_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \times \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (\mathrm{M}\,;\mathrm{M}') & \longmapsto & \|\mathrm{M}-\mathrm{M}'\|_2 = \mathrm{MM}'. \end{array}$$

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \quad \left\{ \begin{array}{c} |x - x_0| < \alpha \\ \text{ou} \\ x \in \left]x_0-\alpha\,; x_0+\alpha\right[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(x_0\,;x) < \alpha \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \|f(x) - \ell\|_2 < \varepsilon \\ \text{ou} \\ \mathrm{d}_2\,(\ell\,;f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

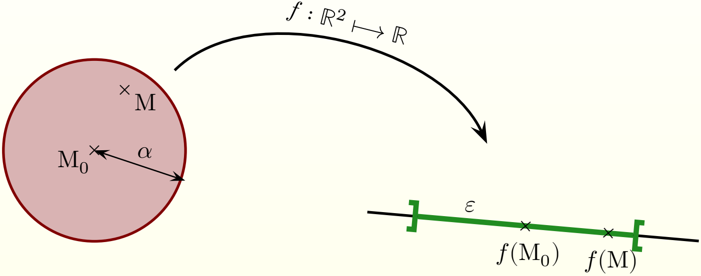


Figure 33 – Fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Pour une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x) = \ell$ s'écrira alors au paragraphe (1) sous la forme légitime :

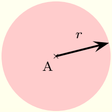
$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \quad \left\{ \begin{array}{c} \left\|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\right\|_2 < \alpha \\ \text{ou} \\ \mathrm{MM}_0 < \alpha \\ \text{ou} \\ \mathrm{d}_2\left(\mathrm{M}_0\,;\mathrm{M}\right) < \alpha \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} |f(\mathrm{M}) - \ell| < \varepsilon \\ \text{ou} \\ f(\mathrm{M}) \in \left]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon\right[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\left(\ell\,;f(\mathrm{M})\right) < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Définition 5 :

Pour tous $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

- boule ouverte de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathrm{A}, r) = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{AM} < r\right\} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < r\right\}.$$



Boule ouverte :
$\mathcal{B}(\mathrm{A}, r)$

Figure 34 – Boules de centre A dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 5 :

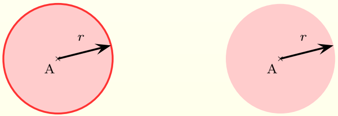
Pour tous $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

- boule ouverte de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathrm{A}, r) = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{AM} < r\right\} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < r\right\}.$$

- boule fermée de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}}(\mathrm{A}, r) = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{AM} \leqslant r\right\} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| \leqslant r\right\}.$$



Boule fermée : $\overline{\mathcal{B}}(\mathrm{A}, r)$

Boule ouverte : $\mathcal{B}(\mathrm{A}, r)$

Figure 34 – Boules de centre A dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 6 (Voisinage d'un point) :

- Soit $A \in \mathbb{R}^2$.
  On appelle **voisinage de A** toute partie de $\mathbb{R}^2$ contenant une boule ouverte de centre A.

  On notera dans ce cours $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(A)$ ou, plus simplement, $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble des voisinages de A dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 6 (Voisinage d'un point) :

- Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^2$.
  On appelle voisinage de A toute partie de $\mathbb{R}^2$ contenant une boule ouverte de centre A.

  On notera dans ce cours $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{A})$ ou, plus simplement, $\mathcal{V}(\mathrm{A})$ l'ensemble des voisinages de A dans $\mathbb{R}^2$.
- Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$.
  On dit que Ω est (un) ouvert si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \Omega,\ \exists\, r > 0,\ \mathcal{B}(\mathrm{A}, r) \subset \Omega.$$

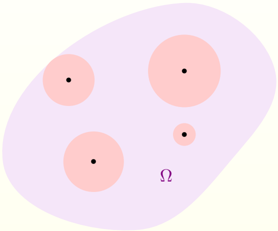


Figure 35 – Un ouvert est (un) voisin(age) de chacun de ses points.

Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il contient une boule ouverte autour de chaque point.

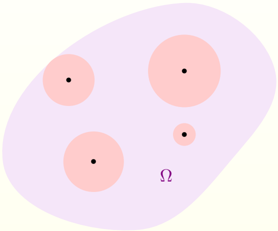


Figure 35 – Un ouvert est (un) voisin(age) de chacun de ses points.

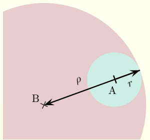
Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il contient une boule ouverte autour de chaque point.

Intuitivement, un ouvert est un ensemble qui n'a pas de « bord » à l'image des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Cette branche des mathématiques s'appelle la topologie.

Proposition 1 :

1. Toute boule ouverte est un ouvert.

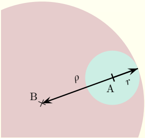
1. $r = \dfrac{\rho - \mathrm{AB}}{2}$.

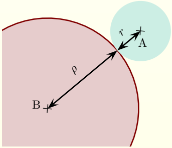


Proposition 1 :

1. Toute boule ouverte est un ouvert.
2. Le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
   En particulier, $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ est un ouvert pour tout $A \in \mathbb{R}^2$.

1. $r = \dfrac{\rho - AB}{2}$.
2. $r = \dfrac{AB - \rho}{2}$.

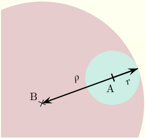


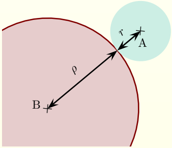


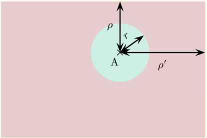
Proposition 1 :

1. Toute boule ouverte est un ouvert.
2. Le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
   En particulier, $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ est un ouvert pour tout $A \in \mathbb{R}^2$.
3. Tout produit de deux intervalles ouverts est un ouvert.

1. $r = \dfrac{\rho - AB}{2}$.
2. $r = \dfrac{AB - \rho}{2}$.
3. $r = \min\{\rho, \rho'\}$







Remarques :

1. Soient $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. La boule fermée $\mathcal{B}_f = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{CM} \leqslant r\right\}$ n'est pas un ouvert.

Remarques :

1. Soient $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. La boule fermée $\mathcal{B}_f = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{CM} \leqslant r\right\}$ n'est pas un ouvert.
2. Il existe des parties ni ouvertes ni fermées comme $\mathrm{A} = [0, 1[\times[0, 1[$.

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ?

1. Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, y > 0\}$.

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ?

1. Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, y > 0\}$.
2. Une boule ouverte.

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ?

1. Le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, y > 0\}$.
2. Une boule ouverte.
3. Une droite.

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ?

1. Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$.
2. Une boule ouverte.
3. Une droite.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$.

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ?

1. Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$.
2. Une boule ouverte.
3. Une droite.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \ \text{ et } \ |y| < 1\}$.
5. $\mathbb{Z}^2$.

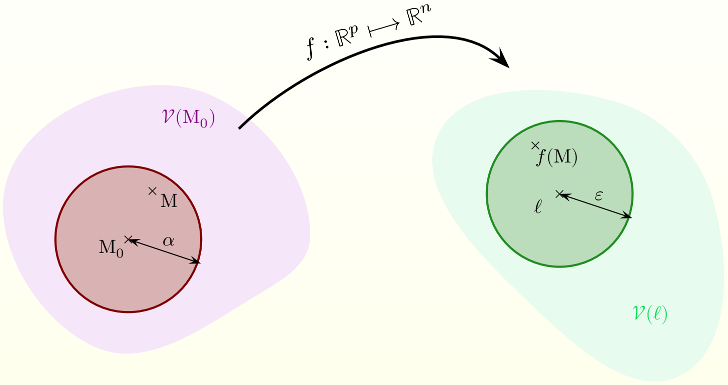


Figure 36 – Cas général d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 7 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$

Définition 7 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \mathrm{M} \in \Omega,\ \mathrm{M}_0\mathrm{M} < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - \ell| < \varepsilon.$

Définition 7 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, M \in \Omega,\ M_0M < \alpha \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall\, V_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell),\ \exists\, V_{M_0} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0),\ \forall\, M \in \Omega \cap V_{M_0},\ f(M) \in V_\ell.$

Définition 7 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \Omega, \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \alpha \implies |f(x,y)-\ell| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0M < \alpha \implies |f(M)-\ell| < \varepsilon.$
- $\forall V_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell), \exists V_{M_0} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0), \forall M \in \Omega \cap V_{M_0}, f(M) \in V_\ell.$

On note alors $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \ell$ ou $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell.$

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont conservés :

- unicité de la limite,

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$),

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$),
- compatibilité/ou pas avec les inégalités larges/strictes,

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$),
- compatibilité/ou pas avec les inégalités larges/strictes,
- théorème d'encadrement, ...

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$),
- compatibilité/ou pas avec les inégalités larges/strictes,
- théorème d'encadrement, ...

Remarque : On aurait pu définir aussi des limites de valeurs $+\infty$ ou $-\infty$, mais nous n'en aurons pas dans ce chapitre.

ATTENTION

Faire tendre $M = (x\,;y)$ vers $A = (x_0\,;y_0)$ ne revient pas à faire tendre x vers x_0 puis y vers y_0 ou le contraire.

Le point M peut se rapprocher de A de bien des manières, il n'est pas obligé d'y aller en ligne droite selon $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ et c'est bien là le problème !

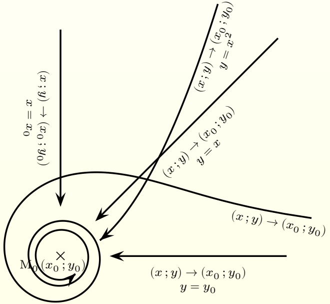
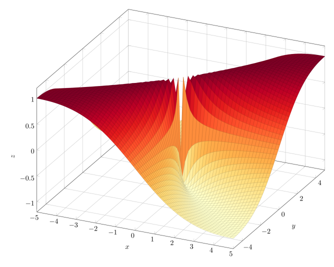


Figure 37 – Différentes manières de tendre vers un point dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 6 :

Considérons la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{array}$$



Il est clair que :

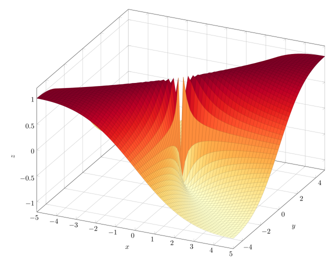
- $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

Mais nous allons voir que f N'a PAS de limite en $(0\,;0)$. Cela se visualise assez bien, mais cela se montre aussi assez bien en coordonnées polaires $(r\,;\theta)$.

Exemple 6 :

Considérons la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{array}$$



Il est clair que :

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

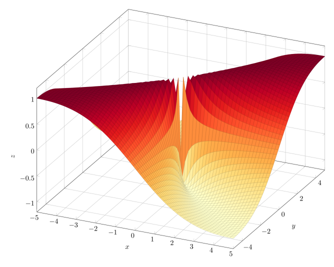
  et

Mais nous allons voir que f N'a PAS de limite en $(0\,;0)$. Cela se visualise assez bien, mais cela se montre aussi assez bien en coordonnées polaires $(r\,;\theta)$.

Exemple 6 :

Considérons la fonction définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{array}$$



Il est clair que :

- $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$

  et

- $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y \to 0} 0 = 0.$

Mais nous allons voir que f N'a PAS de limite en $(0\,;0)$. Cela se visualise assez bien, mais cela se montre aussi assez bien en coordonnées polaires $(r\,;\theta)$.

Exemple 6 :

On sait que tout point $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit sous la forme $(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$ pour un certain $(r\,;\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dit couple de coordonnées polaires de M.

Pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ de coordonnées polaires $(r\,;\theta)$, on a :

$f\,(x\,;y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \dfrac{2r\cos(\theta) \times 2r\sin(\theta)}{r^2} = \sin(2\theta)$, donc f ne dépend que de la variable θ.

Exemple 6 :

On sait que tout point $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit sous la forme $(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$ pour un certain $(r\,;\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dit couple de coordonnées polaires de M.

Pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ de coordonnées polaires $(r\,;\theta)$, on a :

$f\,(x\,;y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \dfrac{2r\cos(\theta) \times 2r\sin(\theta)}{r^2} = \sin(2\theta)$, donc f ne dépend que de la variable θ.

Par conséquent, si $(x\,;y)$ tend vers $(0\,;0)$ en maintenant constant l'angle θ, $(x\,;y)$ tend vers le réel $\sin(2\theta)$ pour ce θ fixé.

On obtient ainsi des limites différentes selon la manière dont on fait tendre $(x\,;y)$ vers $(0\,;0)$, donc f ne peut avoir de limite en $(0\,;0)$.

Exercice 4 :

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers x_0 et y_0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \ell$.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathrm{N}}$ convergeant respectivement vers x_0 et y_0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \ell$.

Comme dans le cas des fonctions à une variable, on se sert surtout de la contraposée de la première implication *i.e.* si on peut trouver deux couples de suites (x_n, y_n) et (x'_n, y'_n) ayant les même limites mais pour lesquelles $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$ alors f ne peut avoir de limite au point considéré ou encore moins être continue (*confer* paragraphe (2)).

Exemple 7 :

Reprenons la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{array}$ de l' **exemple** (6) .

- $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\,;\dfrac{1}{n}\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\,;0\right) = 0 \neq 1.$

Ici aussi, la fonction f ne peut avoir de limite en $(0,0)$.

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ *i.e.* si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ *i.e.* si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall M \in \Omega,\ M_0M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ *i.e.* si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall M \in \Omega,\ M_0M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$
- $\forall V_{f(M_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(M_0)),\quad \exists U_V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0),\ \forall M \in \Omega \cap U_V,\ f(M) \in V_{f(M_0)}.$

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim\limits_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0} f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}_0)$ *i.e.* si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, \mathrm{M} \in \Omega,\ \mathrm{M}_0\mathrm{M} < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, \mathrm{V}_{f(\mathrm{M}_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(\mathrm{M}_0)),\quad \exists\, \mathrm{U}_\mathrm{V} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{M}_0),\ \forall\, \mathrm{M} \in \Omega \cap \mathrm{U}_\mathrm{V},\ f(\mathrm{M}) \in \mathrm{V}_{f(\mathrm{M}_0)}.$

On dit que f est continue sur Ω lorsqu'elle est continue en tout point de Ω.

On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ *i.e.* si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, M \in \Omega,\ M_0M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, V_{f(M_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(M_0)),\quad \exists\, U_V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0),\ \forall\, M \in \Omega \cap U_V,\ f(M) \in V_{f(M_0)}.$

On dit que f est continue sur Ω lorsqu'elle est continue en tout point de Ω.

On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

On notera aussi, suivant le point de vue, $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ *i.e.* si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, M \in \Omega,\ M_0M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, V_{f(M_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(M_0)),\quad \exists\, U_V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0),\ \forall\, M \in \Omega \cap U_V,\ f(M) \in V_{f(M_0)}.$

On dit que f est continue sur Ω lorsqu'elle est continue en tout point de Ω.

On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

On notera aussi, suivant le point de vue, $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

En particulier, si $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un ouvert contenant $f(\Omega)$ alors $\varphi \circ f$ est continue sur Ω.

ATTENTION

Ici aussi, pour montrer qu'une fonction de deux variables $(x\,;y) \longmapsto f(x\,;y)$ est continue en $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$, il ne suffit pas de montrer que les fonctions d'UNE variable $x \longmapsto f(x\,;y_0)$ et $y \longmapsto f(x_0\,;y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0.

ATTENTION

Ici aussi, pour montrer qu'une fonction de deux variables $(x\,;y) \longmapsto f(x\,;y)$ est continue en $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$, il ne suffit pas de montrer que les fonctions d'UNE variable $x \longmapsto f(x\,;y_0)$ et $y \longmapsto f(x_0\,;y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0.

De nouveau, $(x\,;y)$ peut s'approcher de A de bien des manières, il n'est pas obligé de le faire « à x fixé » ou « à y fixé ».

ATTENTION

Ici aussi, pour montrer qu'une fonction de deux variables $(x\,;y) \longmapsto f(x\,;y)$ est continue en $A(x_0\,;y_0)$, il ne suffit pas de montrer que les fonctions d'UNE variable $x \longmapsto f(x\,;y_0)$ et $y \longmapsto f(x_0\,;y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0.

De nouveau, $(x\,;y)$ peut s'approcher de A de bien des manières, il n'est pas obligé de le faire « à x fixé » ou « à y fixé ».

Contre-Exemple 8 :

La fonction $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ de l' exemple (6) précédent n'est pas prolongeable par continuité en $(0\,;0)$, alors que fonctions $x \longmapsto f(x\,;0)$ et $y \longmapsto f(0\,;y)$, identiquement nulles, le sont en 0.

Exemples 9 :

- $\boxed{\text{Les fonctions } (x\,;y) \longmapsto x \text{ et } (x\,;y) \longmapsto y \text{ sont continues sur } \mathbb{R}^2.}$

  A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples 9 :

- $\boxed{\text{Les fonctions } (x\,;y) \longmapsto x \text{ et } (x\,;y) \longmapsto y \text{ sont continues sur } \mathbb{R}^2.}$

  A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- $\boxed{\text{La norme } \vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\| \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$

Exemples 9 :

- $\boxed{\text{Les fonctions } (x\,;y) \longmapsto x \text{ et } (x\,;y) \longmapsto y \text{ sont continues sur } \mathbb{R}^2.}$

  A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- $\boxed{\text{La norme } \vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\| \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$

- Soient I et J deux intervalles, $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathrm{J}, \mathbb{R})$.

  $\boxed{\text{Les fonctions } (x\,;y) \longmapsto \varphi(x) + \psi(y) \text{ et } (x\,;y) \longmapsto \varphi(x)\psi(y) \text{ sont continues sur } \mathrm{I} \times \mathrm{J}.}$

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors :

- $f+g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)
- $|f|$ est continue en (x_0, y_0)

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)
- $|f|$ est continue en (x_0, y_0)
- Si $g(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0)

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)
- $|f|$ est continue en (x_0, y_0)
- Si $g(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0)

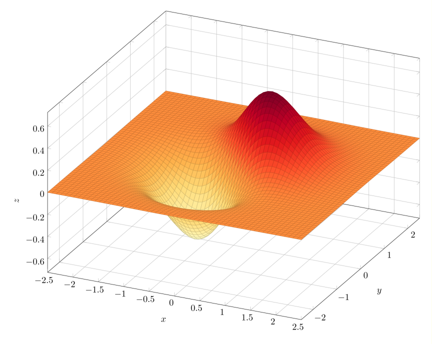
On retrouve que toute combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.

Exercice 5 :

Étudier la continuité $f : (x, y) \longmapsto \sin(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 5 :

Étudier la continuité $f : (x, y) \longmapsto \sin(x + y)e^{-(x^2+y^2)}$.



Proposition 4 :

Si f est continue en (x_0, y_0) alors :

- $f_{y_0} : x \longmapsto f(\cdot, y_0)$ est continue en x_0 ;

Proposition 4 :

Si f est continue en (x_0, y_0) alors :

- $f_{y_0} : x \longmapsto f(\cdot, y_0)$ est continue en x_0 ;
- $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, \cdot)$ est continue en y_0.

Proposition 4 :

Si f est continue en (x_0, y_0) alors :

- $f_{y_0} : x \longmapsto f(\cdot, y_0)$ est continue en x_0 ;
- $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, \cdot)$ est continue en y_0.

ATTENTION

La réciproque est fausse !

Il suffit de considérer encore la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ de l' exemple (6) qui n'est pas continue en $(0, 0)$ alors que ses deux applications partielles $x \longmapsto f(x, 0)$ et $y \longmapsto f(0, y)$, toutes deux identiquement nulles, le sont.

Définition 9 (Dérivée directionnelle) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{v}(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que f est dérivable en A dans la direction $\vec{v}$ si la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{A} + t\vec{v}) - f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} \text{ existe et est finie.}$$

Le cas échéant, on appelle dérivée de f en A dans la direction $\vec{v}$ ce réel noté $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(\mathrm{A})$.

Dire que f est dérivable en A dans la direction $\vec{v}$ revient à dire que la fonction $\mathrm{F} : t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v})$ est dérivable en 0 et on a alors :

$$\mathrm{D}_{\vec{v}} f(\mathrm{A}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{A} + t\vec{v}) - f(\mathrm{A})}{t} = \mathrm{F}'(0).$$

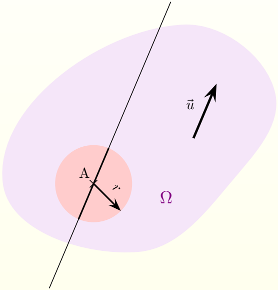


Figure 38 – Droite de $\mathbb{R}^2$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$. On parle de droite affine.

Remarques :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v}) = f(\mathrm{A})$ est définie et constante sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc dérivable en 0 avec $\mathrm{D}_{\vec{0}} f(\mathrm{A}) = 0$.

Remarques :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v}) = f(\mathrm{A})$ est définie et constante sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc dérivable en 0 avec $\mathrm{D}_{\vec{0}} f(\mathrm{A}) = 0$.
- Pour $\vec{v}$ non nul, la définition précédente n'a de sens que parce que la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v})$ est définie au voisinage de 0. Cela découle du caractère ouvert de Ω, qui contient $\mathrm{B}(\mathrm{A}, r)$ pour un certain $r > 0$.

Remarques :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v}) = f(\mathrm{A})$ est définie et constante sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc dérivable en 0 avec $\mathrm{D}_{\vec{0}} f(\mathrm{A}) = 0$.
- Pour $\vec{v}$ non nul, la définition précédente n'a de sens que parce que la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v})$ est définie au voisinage de 0. Cela découle du caractère ouvert de Ω, qui contient $\mathrm{B}(\mathrm{A}, r)$ pour un certain $r > 0$.

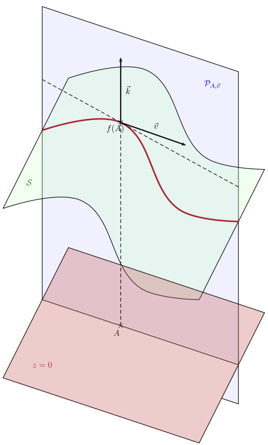
  Posons en effet $\alpha = \dfrac{r}{\|\vec{v}\|}$. Pour tout $t \in \left]-a\,;a\right[$, on :

  $$d(\mathrm{A}, \mathrm{A} + t\vec{v}) = \|t\vec{v}\| = |t| \times \|\vec{v}\| < \alpha\,\|\vec{v}\| = r \implies \mathrm{A} + t\vec{v} \in \mathrm{B}(\mathrm{A}, r) \subset \Omega.$$

  La fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v})$ est ainsi définie sur $\left]-a\,;a\right[$.

Que représente géométriquement la dérivée de f en A dans la direction $\vec{v}$?

1. Considérez dans $\mathbb{R}^3$ le graphe $\mathcal{S}$ de f :



$$\mathcal{S} = \Big\{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (x\,;y) \in \Omega \text{ et } z = f(x\,;y) \Big\}$$

❷ Coupez-le sans ménagement par le plan « vertical » $\mathcal{P}_{A,\vec{v}}$ passant par A dirigé par les deux vecteurs orthogonaux $\vec{v}$ et $\vec{k}$.
En toute rigueur, $\vec{v}$ appartient à $\mathbb{R}^2$, mais nous avons identifié $\mathbb{R}^2$ au plan d'équation $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.
L'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{A,\vec{v}}$ est une courbe $\mathcal{C}$ du plan $\mathcal{P}_{A,\vec{v}}$.

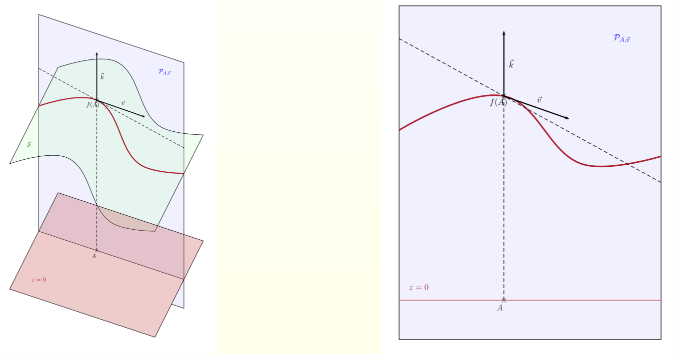
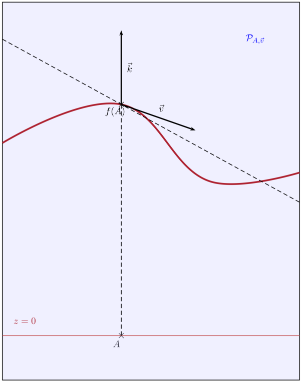


Figure 39 – Dérivée d'une fonction suivant une direction.

3. Oubliez désormais le reste de l'espace et concentrez-vous sur $\mathcal{P}_{\mathrm{A},\vec{v}}$ et $\mathcal{C}$.
Munissez $\mathcal{P}_{\mathrm{A},\vec{v}}$ du repère $(\mathrm{A}, \vec{v}, \vec{k})$.
La courbe $\mathcal{C}$ n'est alors rien de plus que le graphe de la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\vec{v})$ et, s'il existe, $\mathrm{D}_{\vec{v}}f(\mathrm{A})$ est son nombre dérivé en 0 dans la base $(\vec{v}, \vec{k})$ *i.e.* la pente de sa tangente en 0.
Notez bien ici que $\vec{v}$ n'est pas forcément unitaire, il faut en tenir compte quand on se représente la pente.



La définition suivante n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Définition 10 (Dérivées partielles) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

- S'il existe, le réel $\mathrm{D}_{\vec{i}} f(\mathrm{A})$ est appelé dérivé partiel par rapport à x de f en $\mathrm{A}(x_0, y_0)$.
  On le note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_x f(\mathrm{A})$.

La définition suivante n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Définition 10 (Dérivées partielles) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

- S'il existe, le réel $\mathrm{D}_{\vec{i}} f(\mathrm{A})$ est appelé dérivé partiel par rapport à x de f en $\mathrm{A}(x_0, y_0)$.
  On le note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_x f(\mathrm{A})$.
- S'il existe, le réel $\mathrm{D}_{\vec{j}} f(\mathrm{A})$ est appelé dérivé partiel par rapport à y de f en $\mathrm{A}(x_0, y_0)$.
  On le note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_y f(\mathrm{A})$.

Une fonction f d'une seule variable possède une seule dérivée f' quand elle est dérivable. Il arrive qu'on note $\dfrac{df}{dx}$ cette dérivée.

Une fonction f d'une seule variable possède une seule dérivée f' quand elle est dérivable. Il arrive qu'on note $\dfrac{df}{dx}$ cette dérivée.

ATTENTION

Pour une fonction d'une seule variable, la notation $\dfrac{df}{dx}$ s'écrit avec des « d »droits. Pour une fonction de deux variables, les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'écrivent au contraire avec des « d »ronds. C'est comme ça ...

Par ailleurs, quand on évalue $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x\,;y)$, le résultat se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)$ et non $\dfrac{\partial f(x\,;y)}{\partial x}$.

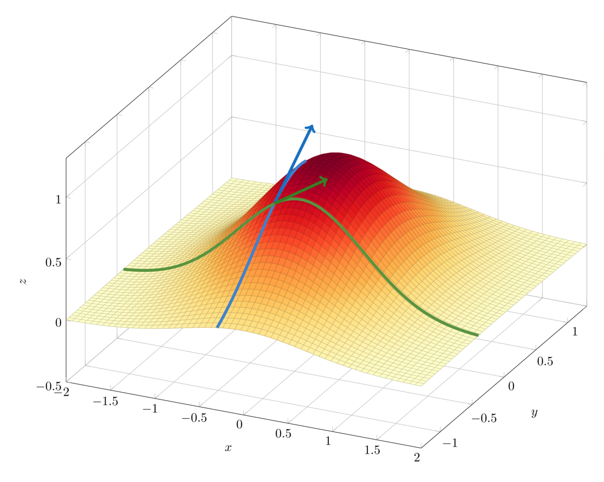


Figure 40 – Dérivée partielle suivant les vecteurs de base.

Le calcul concret des dérivées partielles est très facile.
En effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\vec{i}} f(\mathrm{A}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{A}+t\vec{i}) - f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t\,;y_0) - f(x_0\,;y_0)}{t} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{x_0,y_0}_{\mathrm{A}}) = f'_{y_0}(x_0).
\end{aligned}$$

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})$ revient à fixer y à la valeur y_0 dans $f(x\,;y)$ et à dériver par rapport à x au sens usuel.

Le calcul concret des dérivées partielles est très facile.
En effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\vec{i}} f(\mathrm{A}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{A} + t\vec{i}) - f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,; y_0) - f(x_0\,; y_0)}{t} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{x_0, y_0}_{\mathrm{A}}) = f'_{y_0}(x_0). \end{aligned}$$

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})$ revient à fixer y à la valeur y_0 dans $f(x\,;y)$ et à dériver par rapport à x au sens usuel.

Pour la même raison, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en dérivant $f(x\,;y)$ par rapport à y à x fixé en x_0 :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\vec{j}} f(\mathrm{A}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{A} + t\vec{j}) - f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0\,; y_0 + t) - f(x_0\,; y_0)}{t} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{x_0, y_0}_{\mathrm{A}}) = f'_{x_0}(y_0). \end{aligned}$$

Exemple 10 :

La fonction $(x\,;y) \longmapsto \mathrm{e}^{xy^2}$ possède des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et,

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = y^2\ \mathrm{e}^{xy^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = 2xy\ \mathrm{e}^{xy^2}.$$

Exemple 10 :

La fonction $(x\,;y) \longmapsto e^{xy^2}$ possède des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et,

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = y^2\ e^{xy^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = 2xy\ e^{xy^2}.$$

ATTENTION

L'existence des deux dérivées partielles de f n'entraîne pas la continuité de f.

Contre-Exemple 11 :

Considérer encore la fonction de l' exemple (6) :

$$f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Théorème 5 (Opérations sur les dérivées partielles) :

Combinaison linéaire, produit, inverse : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si f et g possèdent des dérivées partielles sur Ω, il en est de même de toute combinaison linéaire de f et g et du produit fg, mais aussi de l'inverse $\frac{1}{f}$ si f ne s'annule pas.
En outre, pour tous $k \in \{x, y\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\partial_k f(\lambda f + g) = \lambda \partial_k f + \partial_k g, \quad \partial_k (fg) = g\partial_k f + f\partial_k g \quad \text{et} \quad \partial_k \left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial_k f}{f^2}.$$

Composition : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle, $f : \Omega \longmapsto \mathrm{I}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(\Omega) \subset \mathrm{I}$.
Si f possède des dérivées partielles sur Ω et si φ est dérivable sur I, alors $\varphi \circ f$ possède des dérivées partielles sur Ω et, pour tout $k \in \{x, y\}$:

$$\boxed{\partial_k (\varphi \circ f) = \partial_k f \times \varphi' \circ f.}$$

Exercice 6 :

Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 \sin(xy)$.

1. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 6 :

Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 \sin(xy)$.

1. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

   Déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Un commentaire ?

Définition 11 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$** si ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω.

On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

Méthode 1 :

Pour qu'une fonction f, à deux variables, soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, il suffira donc :

1. de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Méthode I :

Pour qu'une fonction f, à deux variables, soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, il suffira donc :

1. de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. montrer que, à y fixé, la fonction (à une variable) $x \longmapsto f(x\,;y)$ est dérivable sur un ouvert I_y tel que $\mathrm{I}_y \times \{y\} \subset \Omega$.

Méthode 1 :

Pour qu'une fonction f, à deux variables, soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, il suffira donc :

1. de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. montrer que, à y fixé, la fonction (à une variable) $x \longmapsto f(x\,;y)$ est dérivable sur un ouvert I_y tel que $\mathrm{I}_y \times \{y\} \subset \Omega$.
3. montrer que, à x fixé, la fonction (à une variable) $y \longmapsto f(x\,;y)$ est dérivable sur un ouvert I_x tel que $\{x\} \times \mathrm{I}_x \subset \Omega$.

Méthode 1 :

Pour qu'une fonction f, à deux variables, soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, il suffira donc :

1. de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. montrer que, à y fixé, la fonction (à une variable) $x \longmapsto f(x\,;y)$ est dérivable sur un ouvert I_y tel que $\mathrm{I}_y \times \{y\} \subset \Omega$.
3. montrer que, à x fixé, la fonction (à une variable) $y \longmapsto f(x\,;y)$ est dérivable sur un ouvert I_x tel que $\{x\} \times \mathrm{I}_x \subset \Omega$.
4. les fonctions (à deux variables) $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)$ et $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)$ sont continues sur Ω.

Exemples 12 :

- $\boxed{\text{Les fonctions } (x\,;y) \longmapsto x \text{ et } (x\,;y) \longmapsto y \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

  A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples 12 :

- Les fonctions $(x\,;y) \longmapsto x$ et $(x\,;y) \longmapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

  A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- La norme $\vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\|$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$!

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas aussi.

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas aussi.
- Enfin, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et tout intervalle I, la composée $\varphi \circ f$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas aussi.
- Enfin, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et tout intervalle I, la composée $\varphi \circ f$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Remarque : Il peut sembler curieux qu'on dispose d'une notion de continuité et d'une notion de classe $\mathcal{C}^1$, mais pas d'une notion intermédiaire de dérivabilité. Le chaînon manquant s'appelle la différentiabilité et ne figure pas au programme de PTSI.

Exercice 7 :

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

1. $(x\,;y) \longmapsto \begin{cases} xy\ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si } (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0 & \text{si } (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 :

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

1. $(x\,;y) \longmapsto \begin{cases} xy\ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si } (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0 & \text{si } (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $(x\,;y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0 & \text{si } (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 7 (Formule de Taylor-Young) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

La fonction f admet en tout point (x_0, y_0) de Ω un développement limité d'ordre 1 donné par :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)+\underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}\left(\|(h_1\,;h_2)\|\right).$$

Remarques :

- À rapprocher du DL_1 d'une fonction réelle

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

Remarques :

- À rapprocher du DL_1 d'une fonction réelle

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

- La condition $(x_0+h_1, y_0+h_2) \in \Omega$ est vérifiée dès que $\|(h_1\,;h_2)\|$ car Ω est ouvert.

Remarques :

- À rapprocher du DL_1 d'une fonction réelle
$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$
- La condition $(x_0+h_1, y_0+h_2) \in \Omega$ est vérifiée dès que $\|(h_1\,;h_2)\|$ car Ω est ouvert.
- $\underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|(h_1\,;h_2)\|)$ désigne une fonction négligeable devant $\|(h_1\,;h_2)\|$ *i.e.* qui peut s'écrire sous la forme $\|(h_1\,;h_2)\|\varepsilon(h_1\,;h_2)$ avec $\lim\limits_{(h_1;h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1\,;h_2) = 0$.

Remarques :

- À rapprocher du DL_1 d'une fonction réelle

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

- La condition $(x_0+h_1, y_0+h_2) \in \Omega$ est vérifiée dès que $\|(h_1\,;h_2)\|$ car Ω est ouvert.
- $\underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|\,(h_1\,;h_2)\,\|)$ désigne une fonction négligeable devant $\|(h_1\,;h_2)\|$ *i.e.* qui peut s'écrire sous la forme $\|\,(h_1\,;h_2)\,\|\varepsilon\,(h_1\,;h_2)$ avec $\lim\limits_{(h_1;h_2)\to(0,0)} \varepsilon\,(h_1\,;h_2) = 0$.
- On remarquera que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (h_1\,;h_2) & \longmapsto & h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}$$

est linéaire. On l'appellera la différentielle de f en $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$.

- En posant $(x\,;y)=(x_0+h_1,y_0+h_2)$ alors $(h_1\,;h_2)=(x-x_0,y-y_0)$ et la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$+\underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}\big(\|(x-x_0,y-y_0)\|\big).$$

- En posant $(x\,;y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ alors $(h_1\,;h_2) = (x - x_0, y - y_0)$ et la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}\big(\,\|(x - x_0, y - y_0)\|\,\big).$$

- La formule de Taylor-Young montre que pour $\|(x - x_0, y - y_0)\|$ assez petit, l'accroissement $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ peut-être approché « au premier ordre » par l'expression linéaire :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

On écrit :

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \simeq (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

au voisinage de (x_0,y_0).

Corollaire 1 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω y est continue.

Exercice 8 :

Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y + xy$.

1. Calculer $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$.

Exercice 8 :

Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y + xy$.

1. Calculer $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$.
2. Reconnaître les différents termes du DL_1 de f en (x_0, y_0).

Reprenons le développement de Taylor-Young du théorème (7) :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}\left(\|(h_1\,;h_2)\| \right).$$

V. Gradient

1. Vecteur gradient

Reprenons le développement de Taylor-Young du théorème (7) :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}\left(\|(h_1\,;h_2)\| \right).$$

Définition 12 (Gradient) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f possède des dérivées partielles en A, on appelle gradient de f en A le vecteur de $\mathbb{R}^2$, noté $\overrightarrow{grad} f(\mathrm{A})$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(\mathrm{A})$, défini par :

$$\overrightarrow{\nabla} f(\mathrm{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})\,; \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A}) \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

V. Gradient

1. Vecteur gradient

Reprenons le développement de Taylor-Young du théorème (7) :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}\left(\|(h_1\,;h_2)\| \right).$$

Définition 12 (Gradient) :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f possède des dérivées partielles en A, on appelle gradient de f en A le vecteur de $\mathbb{R}^2$, noté $\overrightarrow{grad} f(\mathrm{A})$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(\mathrm{A})$, défini par :

$$\overrightarrow{\nabla} f(\mathrm{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})\,; \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A}) \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Remarques : $\overrightarrow{\nabla} f$ se lit « nabla f » et c'est donc une application (vectorielle certes !) de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
$\forall\, h\,(h_1\,;h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a+h) = f(a) + \overrightarrow{\nabla} f(a) \cdot h + \underset{h \to (0,0)}{\mathrm{o}}\,(h)\ .$$

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
$\forall\, h\,(h_1\,;h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a+h) = f(a) + \overrightarrow{\nabla} f(a) \cdot h + \underset{h \to (0,0)}{\mathrm{o}}(h) .$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les gradients) :

- $\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\nabla} g.$

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
$\forall\, h\,(h_1\,;h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a+h) = f(a) + \overrightarrow{\nabla} f(a) \cdot h + \underset{h\to(0,0)}{\mathrm{o}}(h)\ .$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les gradients) :

- $\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\nabla} g.$
- $\overrightarrow{\nabla}(f \times g) = g \overrightarrow{\nabla} f + f \overrightarrow{\nabla} g.$

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a(x_0, y_0) \in \Omega$. $\forall\, h\,(h_1\,;h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a+h) = f(a) + \overrightarrow{\nabla} f(a) \cdot h + \underset{h \to (0,0)}{\mathrm{o}}(h)\,.$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les gradients) :

- $\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\nabla} g.$
- $\overrightarrow{\nabla}(f \times g) = g \overrightarrow{\nabla} f + f \overrightarrow{\nabla} g.$
- $\overrightarrow{\nabla}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{1}{f^2} \overrightarrow{\nabla} f.$

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a(x_0, y_0) \in \Omega$. $\forall\, h\,(h_1\,;h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a+h) = f(a) + \overrightarrow{\nabla} f(a) \cdot h + \underset{h \to (0,0)}{\mathrm{o}}(h)\ .$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les gradients) :

- $\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\nabla} g$.
- $\overrightarrow{\nabla}(f \times g) = g \overrightarrow{\nabla} f + f \overrightarrow{\nabla} g$.
- $\overrightarrow{\nabla}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{1}{f^2} \overrightarrow{\nabla} f$.
- $\overrightarrow{\nabla}(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \times \overrightarrow{\nabla} f$.

Théorème 9 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ non nul de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Théorème 9 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ non nul de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

En particulier,

- Le développement de Taylor-Young peut donc aussi s'écrire :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \partial_{(h_1;h_2)} f(x_0, y_0) + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\| (h_1 ; h_2) \|).$$

Théorème 9 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ non nul de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

En particulier,

- Le développement de Taylor-Young peut donc aussi s'écrire :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \partial_{(h_1;h_2)} f(x_0, y_0) + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\| (h_1 ; h_2) \|).$$

- Le théorème (9) garantit l'existence de dérivées dans **toutes** les directions que l'on peut calculer facilement à partir des dérivées partielles ou du gradient.

Par définition, une fonction de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ quand elle possède des dérivées continues dans les deux directions privilégiées $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Par définition, une fonction de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ quand elle possède des dérivées continues dans les deux directions privilégiées $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Remarque : Si on pose $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$, on retrouve :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = 1\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 0\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \partial_{\vec{j}} f(x_0, y_0) = 0\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 1\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

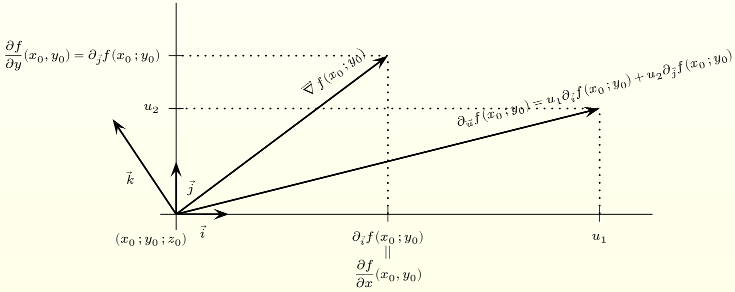


Figure 41 – Dérivée suivant un vecteur.

Pour une fonction f d'une seule variable, vous savez depuis longtemps que le réel $f'(a)$ est la pente de la tangente de f en a.

Pour une fonction f d'une seule variable, vous savez depuis longtemps que le réel $f'(a)$ est la pente de la tangente de f en a.

Pour vous le faire comprendre, on vous a sans doute dit que « quand on avance de 1 vers la droite en abscisse, on monte de $f'(a)$ en ordonnée sur la tangente ».

V. Gradient

1. Vecteur gradient

Pour une fonction f d'une seule variable, vous savez depuis longtemps que le réel $f'(a)$ est la pente de la tangente de f en a.

Pour vous le faire comprendre, on vous a sans doute dit que « quand on avance de 1 vers la droite en abscisse, on monte de $f'(a)$ en ordonnée sur la tangente ».

La situation est la même pour une fonction f de deux variables. Au voisinage de $\mathrm{A}(x_0, y_0)$, le graphe de f a l'allure de son plan tangent et $\mathrm{D}_{\vec{u}}f(\mathrm{A})$ n'est jamais que la pente de ce plan dans la direction $\vec{v}$.

Le théorème (9) énonce que quand on avance de u_1 dans la direction $\vec{i}$ et de u_2 dans la direction $\vec{j}$, on monte de $u_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A}) + u_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})$ dans la direction $\vec{k}$ sur le plan tangent.

Exercice 9 :

Soit $f : (x\,;y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - x - \cos(y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0\,;0)$ puis déterminer $\overrightarrow{\nabla} f(0\,;0)$.

Pour les fonctions de la variable réelle, si $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}\,(x - x_0)\,.$$

Lorsqu'on écrit $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0, on approche ainsi localement la fonction f par la fonction affine

$$x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On va étendre cette idée aux fonctions de deux variables :

V. Gradient

2. Plan tangent

Pour les fonctions de la variable réelle, si $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}\,(x - x_0)\,.$$

Lorsqu'on écrit $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0, on approche ainsi localement la fonction f par la fonction affine

$$x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On va étendre cette idée aux fonctions de deux variables :

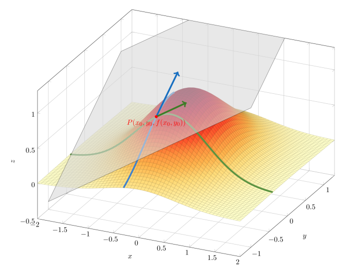


Figure 42 – Plan tangent à $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ en $\mathrm{M}(x_0, y_0)$.

Théorème 10 :

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = f(x, y)$ au point $\mathrm{M}\,(x_0\,; y_0\,; z_0)$ où $z_0 = f\,(x_0\,; y_0)$ a pour équation :

$$z-z_0 = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \iff z-z_0 = \overrightarrow{\nabla} f\,(x_0\,; y_0)\cdot\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

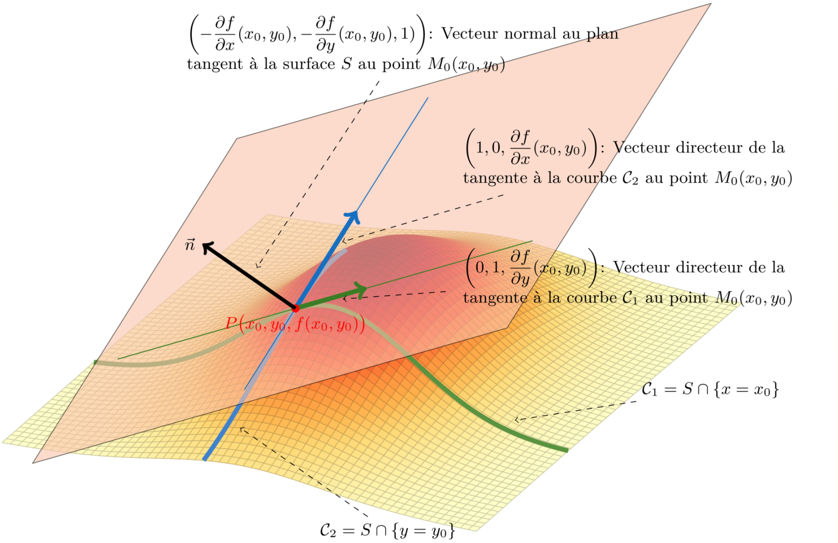


Figure 43 – Plan tangent à une surface.

Remarque : Résultat à rapprocher de l'équation de la tangente :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Nous savons depuis longtemps qu'une courbe suffisamment régulière ressemble localement à une droite. Sans surprise, toute surface suffisamment régulière ressemble localement à un plan.

Remarque : Résultat à rapprocher de l'équation de la tangente :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Nous savons depuis longtemps qu'une courbe suffisamment régulière ressemble localement à une droite. Sans surprise, toute surface suffisamment régulière ressemble localement à un plan.

Pour une fonction φ d'une seule variable, l'équation de la tangente en a est donnée par :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(a).$$

La situation est finalement la même pour les fonctions de deux variables.

Exercice 10 :

Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + y + xy$ en $(0\,;0)$.

Exercice 10 :

Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + y + xy$ en $(0\,;0)$.
2. $(x\,;y) \longmapsto xy\,\mathrm{e}^{\cos(x)}$ en $(0\,;0)$.

Définition 13 :

On appelle arc paramétré γ une fonction de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut facilement se représenter un arc en cinématique : $\gamma(t)$ représentant la position d'un mobile au temps t dans le plan $\mathbb{R}^2$.

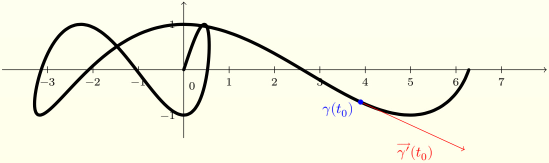


Figure 44 – Trajectoire de $\gamma : t \longmapsto \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ sur $[0\,;2\pi]$.

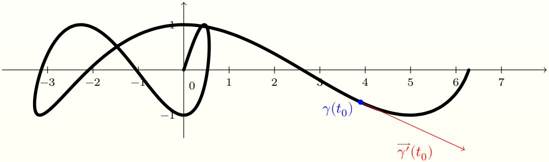


Figure 45 – Trajectoire de $\gamma : t \longmapsto \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ sur $[0\,;2\pi]$.

La fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on définit alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Dans l'interprétation cinématique, $\gamma'(t)$ représente la vitesse du mobile au temps t ou plutôt le vecteur vitesse instantané que l'on note habituellement $\vec{\gamma}'(t)$ laissant $\gamma(t)$ sans flèche pour rappeler leur vocation respective de vecteur vitesse et de vecteur position.

Exercice ll :

Représenter l'arc défini par $\gamma : t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$.

Déterminer γ'.

On va composer un arc par une fonction de deux variables :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad\gamma\quad} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & \mathbb{R} \\ t & & \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} & & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

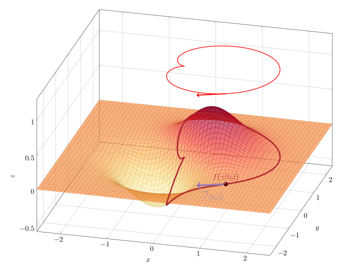


Figure 46 – Cardioïde d'équation $\gamma : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t)(1+\cos(t)) \\ \sin(t)(1+\cos(t)) \end{pmatrix}$ tracée sur la surface $f : (x\,;y) \longmapsto (x+y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

La fonction obtenue est une fonction réelle $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Est-elle dérivable ? Et quelle est sa dérivée ?

La fonction obtenue est une fonction réelle $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Est-elle dérivable ? Et quelle est sa dérivée ?

Théorème 11 (Règle de la chaîne) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On considère $\gamma : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma(\mathrm{I}) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \gamma$ soit bien définie.

Si γ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$, respectivement sur I et Ω alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathrm{I}, \quad (f \circ \gamma)'(t) &= x'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\, \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= \overrightarrow{\nabla}\, f(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)}. \end{aligned}$$

Remarques :

- Écriture à rapprocher de $(f \circ \varphi)' = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t))$.

Remarques :

- Écriture à rapprocher de $(f \circ \varphi)' = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t))$.
- À la manière des physiciens mais abusivement pour nous, on retient souvent la règle de la chaîne sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Remarques :

- Écriture à rapprocher de $(f \circ \varphi)' = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t))$.
- À la manière des physiciens mais abusivement pour nous, on retient souvent la règle de la chaîne sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

- La relation $(f \circ \gamma)'(t) = x'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \mathrm{D}_{\gamma'(t)} f(\gamma(t))$ montre que $(f \circ \gamma)'(t)$ est une dérivée directionnelle de f, en l'occurrence la dérivée de f en $\gamma(t)$ dans la direction $\overrightarrow{\gamma'(t)}$.

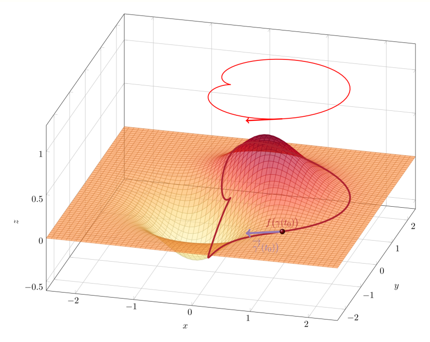


Figure 47 – Cardioïde tracée sur une surface.

- La figure (47) illustre le phénomène. Le mobile γ évolue dans le plan $\mathbb{R}^2$, mais on peut s'intéresser à sa projection verticale sur le graphe de f.

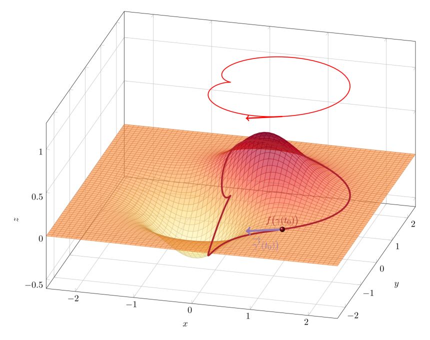


Figure 47 – Cardioïde tracée sur une surface.

- La figure (47) illustre le phénomène. Le mobile γ évolue dans le plan $\mathbb{R}^2$, mais on peut s'intéresser à sa projection verticale sur le graphe de f.

  Le résultat est un nouvel arc paramétré, à trois dimensions cette fois et entièrement contenu dans le graphe de f.

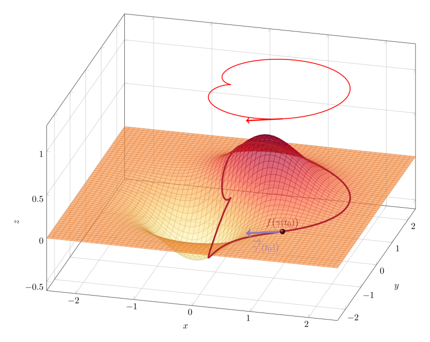


Figure 47 – Cardioïde tracée sur une surface.

- La figure (47) illustre le phénomène. Le mobile γ évolue dans le plan $\mathbb{R}^2$, mais on peut s'intéresser à sa projection verticale sur le graphe de f.

  Le résultat est un nouvel arc paramétré, à trois dimensions cette fois et entièrement contenu dans le graphe de f.

  Sur la figure (47), la pente de la droite en pointillé dans le repère $(\overrightarrow{\gamma(t)}, \overrightarrow{\gamma'(t)}, \vec{k})$ vaut à la fois $(f \circ \gamma)'(t)$ et $\mathrm{D}_{\gamma'(t)} f(\gamma(t))$.

Théorème 12 :

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\phi, \psi : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Soit $\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (\phi(u,v), \psi(u,v)) \end{array}$ telle que $\Gamma(\mathrm{D}) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \Gamma$ soit bien définie.

Alors $\mathrm{F} = f \circ \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et on a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{F} : & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\ \Gamma\ } & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ & (u,v) & & (\phi(u,v), \psi(u,v)) & & f\Big(\phi(u,v), \psi(u,v)\Big) \end{array}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v). \end{cases}$$

Remarque : On peut à nouveau retenir simplement [1] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

en travaillant à la physicienne, et en notant :

$$(u,v) \longmapsto (\underbrace{\phi(u,v)}_{x}, \underbrace{\psi(u,v)}_{y}) \longmapsto f(\phi(u,v), \psi(u,v))$$

[1]. abusivement !

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy).$$

Proposition 13 :

On se place dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ orthonormé du plan.

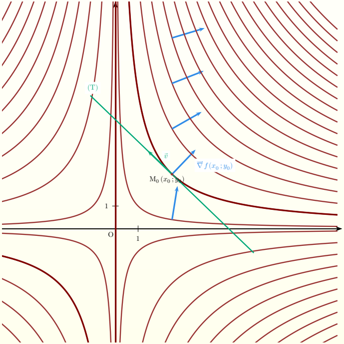
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soient $\gamma : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma(\mathrm{I}) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \gamma$ soit bien définie.

Si $f \circ \gamma$ est une ligne de niveau alors la dérivée de γ est orthogonale au gradient de f en tout point de celle-ci :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f\big(\gamma(t)\big) = k \in \mathbb{R} \implies \overrightarrow{\nabla} f\big(\gamma(t)\big) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0.$$

Les lignes de niveau sont orthogonales au gradient.



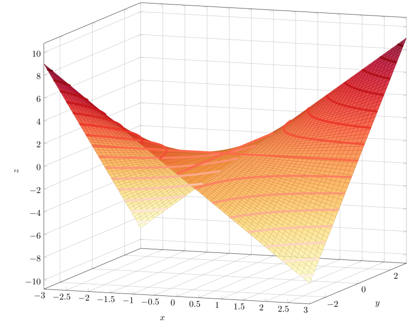


Figure 48 – Lignes de niveau k de la surface $z = xy$.
La la ligne de niveau passant par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ a pour équation $xy = k$ où $k = x_0 y_0$.
En ce point M_0 est dessiné un vecteur tangent $\vec{v}$ et la tangente à la ligne de niveau.
Le vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau en ce point.

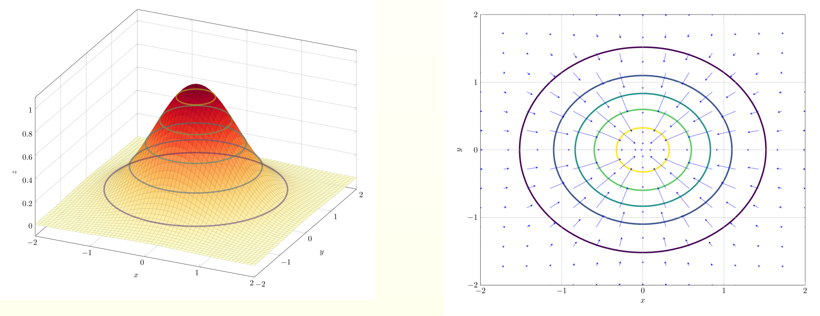


Figure 49 – Graphe de $f : (x\,;y) \longmapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, son champ de gradients et quelques lignes de niveaux.

En physique, on retiendra que les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

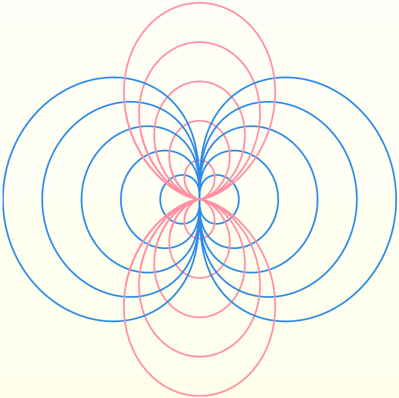


Figure 50 –
On appelle ligne de champ, un arc paramétré qui est tangent en chacun de ses points au gradient de f représenté ici en bleu.
Ici est représenté le Potentiel créé par un dipôle électrostatique en un point de l'espace ainsi que ses lignes de champ.

Théorème 14 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{A}$.

Parmi tous les arcs paramétrés γ de classe $\mathcal{C}^1$ passant par (x_0, y_0), i.e. $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, avec $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, la valeur de $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est :

- maximale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de même sens ;

Théorème 14 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Soit $(x_0, y_0) \in \text{A}$.

Parmi tous les arcs paramétrés γ de classe $\mathcal{C}^1$ passant par (x_0, y_0), i.e. $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, avec $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, la valeur de $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est :

- maximale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de même sens ;
- minimale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de sens contraire.

Théorème 14 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{A}$.

Parmi tous les arcs paramétrés γ de classe $\mathcal{C}^1$ passant par (x_0, y_0), i.e. $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, avec $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, la valeur de $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est :

- maximale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de même sens ;
- minimale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de sens contraire.

Interprétation graphique : $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ représente donc la direction de la ligne de plus grande pente sur la surface d'équation $z = f(x, y)$, et il est orienté vers les valeurs les plus élevées.

Autrement dit, si l'on veut passer le plus vite possible du niveau k au niveau $k' < k$, à partir du point donné $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ de niveau $f(x,y) = k$, alors il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$. [2]

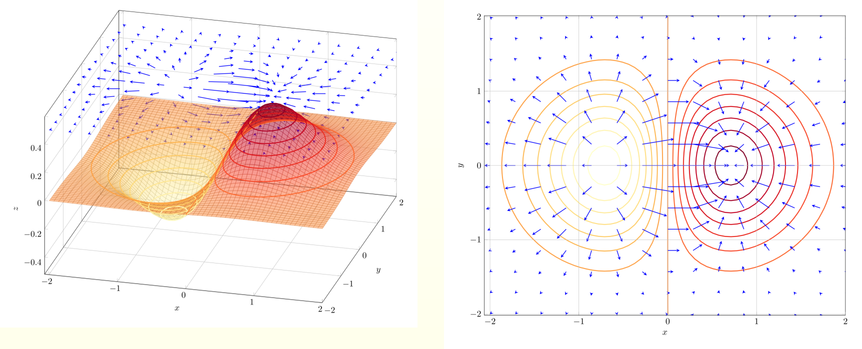


Figure 51 – Lignes de niveau et champ de gradients de $f : (x\,;y) \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

[2]. Un skieur voulant aller vite choisit la plus forte pente descendante en un point de la montagne, c'est la direction inverse du gradient.

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω.

- On dit que f présente un maximum global en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall\,(x, y) \in \Omega \quad f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω.

- On dit que f présente un maximum global en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall\,(x,y) \in \Omega \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

- On dit que f présente un minimum global en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω.

- On dit que f présente un maximum global en (x_0, y_0) lorsque
$$\forall\,(x,y) \in \Omega \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$
- On dit que f présente un minimum global en (x_0, y_0) lorsque
$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$
- On dit que f présente un maximum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < \alpha \implies f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

VII. Extrema

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω.

- On dit que f présente un maximum global en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall\,(x,y) \in \Omega \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

- On dit que f présente un minimum global en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$

- On dit que f présente un maximum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < \alpha \implies f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

- On dit que f présente un minimum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < \alpha \implies f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$

VII. Extrema

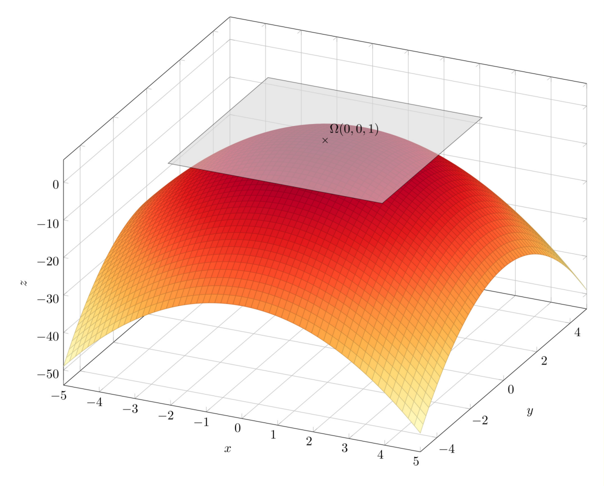


Figure 52 – $\Omega\,(0\,;0\,;1)$ est un maximum local de $(x\,;y) \longmapsto 1-(x^2+y^2)$.

Remarques :

- Un extremum local est donc un extremum global sur un ouvert contenu dans Ω. Un extremum global est un extremum local. un extremum local peut être un extremum global.

Remarques :

- Un extremum local est donc un extremum global sur un ouvert contenu dans Ω. Un extremum global est un extremum local. un extremum local peut être un extremum global.
- Rien ne dit que les extrema locaux ou globaux sont uniques.

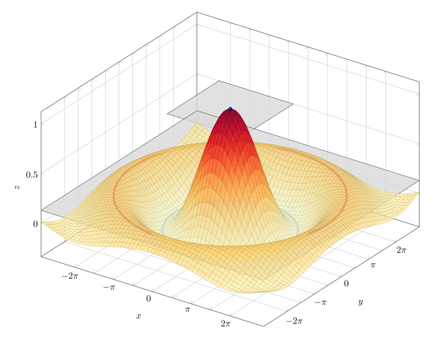


Figure 53 – La fonction $\mathrm{S} : (x\,;y) \longmapsto \dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ admet un maximum global unique ainsi qu'une infinité de maxima locaux et de minima locaux.

Exercice 13 :

Déterminer les points critiques de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^2+xy+y^2-3x+1. \end{array}$

VII. Extrema

Proposition 15 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ alors :

Si f présente un extremum local en $\mathrm{A}(x_0, y_0)$, alors :

- l'application partielle $f(\cdot, y_0)$ présente un extremum local en x_0

Proposition 15 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ alors :

Si f présente un extremum local en $\mathrm{A}(x_0, y_0)$, alors :

- l'application partielle $f(\cdot, y_0)$ présente un extremum local en x_0
- l'application partielle $f(x_0, \cdot)$ présente un extremum local en y_0

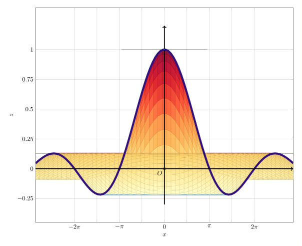


Figure 54 – L'application partielle $\mathrm{S}_{y=0} : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet des extrema en les abscisses de ceux de S.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple (13).

Contre-Exemple 13 :

Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$ et $A(0,0)$.

Alors $f_{A,x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $f_{A,y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -y^2 \end{array}$.

- La fonction $f_{A,x}$ admet un minimum local en 0.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple (13).

Contre-Exemple 13 :

Soient $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2 \end{array}$ et $\mathrm{A}(0,0)$.

Alors $f_{\mathrm{A},x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $f_{\mathrm{A},y}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -y^2 \end{array}$.

- La fonction $f_{\mathrm{A},x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{\mathrm{A},y}$ admet un maximum local en 0.

Contre-Exemple 13 :

Soient $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2 \end{array}$ et $\mathrm{A}(0,0)$.

Alors $f_{\mathrm{A},x}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $f_{\mathrm{A},y}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -y^2 \end{array}$.

- La fonction $f_{\mathrm{A},x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{\mathrm{A},y}$ admet un maximum local en 0.

Supposons alors, par exemple, que f admette un minimum local en $(0,0)$ alors il existe $r>0$ tel que :

$$\forall\, xy \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < r \implies f(x,y) \geqslant f(0,0) \text{ avec } f(0,0)=0.$$

Contre-Exemple 13 :

Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2 \end{array}$ et $\mathrm{A}(0,0)$.

Alors $f_{\mathrm{A},x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $f_{\mathrm{A},y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -y^2 \end{array}$.

- La fonction $f_{\mathrm{A},x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{\mathrm{A},y}$ admet un maximum local en 0.

Supposons alors, par exemple, que f admette un minimum local en $(0,0)$ alors il existe $r>0$ tel que :

$$\forall\, xy \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < r \implies f(x,y) \geqslant f(0,0) \text{ avec } f(0,0)=0.$$

Or, en prenant $(x,y) = \left(0\,;\dfrac{r}{2}\right)$ alors $\|(x,y)\| < \dfrac{r}{2} < r$ et $f(x,y) = -\dfrac{r^2}{4} < 0$ qui est une contradiction.

Contre-Exemple 13 :

Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$ et $\mathrm{A}(0,0)$.

Alors $f_{\mathrm{A},x} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $f_{\mathrm{A},y} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -y^2 \end{array}$.

- La fonction $f_{\mathrm{A},x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{\mathrm{A},y}$ admet un maximum local en 0.

Supposons alors, par exemple, que f admette un minimum local en $(0,0)$ alors il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall\, xy \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < r \implies f(x,y) \geqslant f(0,0) \text{ avec } f(0,0) = 0.$$

Or, en prenant $(x,y) = \left(0\,;\dfrac{r}{2}\right)$ alors $\|(x,y)\| < \dfrac{r}{2} < r$ et $f(x,y) = -\dfrac{r^2}{4} < 0$ qui est une contradiction.

Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. On dit que A est un point col.

VII. Extrema

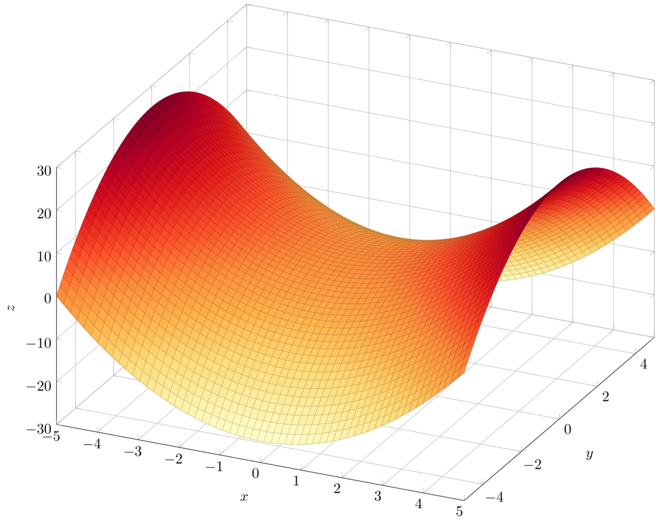


Figure 55 – La surface de la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$ présente un point col en $(0,0)$

Exercice 14 :

Soit $f : (x, y) \longmapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : x \longmapsto f(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0.

Exercice 14 :

Soit $f : (x, y) \longmapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : x \longmapsto f(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0.
2. f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$? On pourra étudier $f(x, 2x^2 - x^3)$

Définition 15 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et (x_0, y_0) un point de Ω.

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Définition 15 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et (x_0, y_0) un point de Ω.

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Remarque : En un point critique, le plan tangent à la surface est parallèle à $z = 0$.

Définition 15 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et (x_0, y_0) un point de Ω.

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Remarque : En un point critique, le plan tangent à la surface est parallèle à $z = 0$.

Théorème 16 :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f présente en $(x_0, y_0) \in \Omega$ un extremum local alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Remarques :

- Attention aux hypothèses du théorème : f est de classe $\mathcal{C}^1$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  À rapprocher du théorème équivalent pour les fonctions réelles : si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ présente un extremum en a, si f est dérivable en a et a n'est pas au bord de I, alors $f'(a) = 0$.

Remarques :

- Attention aux hypothèses du théorème : f est de classe $\mathcal{C}^1$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  À rapprocher du théorème équivalent pour les fonctions réelles : si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ présente un extremum en a, si f est dérivable en a et a n'est pas au bord de I, alors $f'(a) = 0$.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire comme pour les fonctions réelles. f peut ne pas présenter d'extremum en un point critique : Pensez au point-col de l' exemple (14) !
  Ce théorème dit juste que les extrema seront nécessairement à chercher parmi les points critiques de f.

VII. Extrema

Remarques :

- Attention aux hypothèses du théorème : f est de classe $\mathcal{C}^1$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  À rapprocher du théorème équivalent pour les fonctions réelles : si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ présente un extremum en a, si f est dérivable en a et a n'est pas au bord de I, alors $f'(a) = 0$.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire comme pour les fonctions réelles. f peut ne pas présenter d'extremum en un point critique : Pensez au point-col de l' exemple (14) !
  Ce théorème dit juste que les extrema seront nécessairement à chercher parmi les points critiques de f.
- Si (x_0, y_0) est un point critique de f alors $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.
  Donc pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, la dérivée de f suivant le vecteur $\vec{u}$ est nulle.
  En effet,
  $$\mathrm{D}_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$
  Par contraposition, si on trouve un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{D}_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \neq 0$ alors (x_0, y_0) n'est pas un point critique de f, et donc f ne présente pas d'extremum en (x_0, y_0).

VII. Extrema

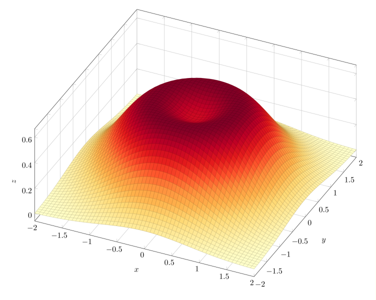


Figure 56 – Minimum local non global

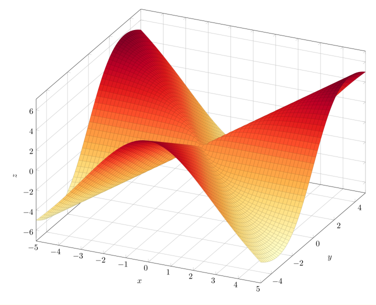


Figure 57 – Point critique non extrémal

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Cherchons un extremum de f. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert, si f admet un extremum en M_0, le point M_0 sera un point critique de f.

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Cherchons un extremum de f. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert, si f admet un extremum en M_0, le point M_0 sera un point critique de f.

Or, $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \end{cases}$.

Exemple 14 :

On considère encore $f:(x,y) \longmapsto x^2-y^2$.

Cherchons un extremum de f. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert, si f admet un extremum en M_0, le point M_0 sera un point critique de f.

Or, $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y\end{cases}$.

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2x=0\\ -2y=0\end{cases} \iff (x,y)=(0,0).$$

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x,y) \longmapsto x^2 - y^2$.

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

$(0,0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x,y) \longmapsto x^2 - y^2$.

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

$(0,0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x,0) = x^2 \geqslant 0 = f(0,0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0,0)$.

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

$(0,0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x,0) = x^2 \geqslant 0 = f(0,0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0,0)$.
- $\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f(0,y) = -y^2 \leqslant 0 = f(0,0)$. Donc, f ne présente pas de minimum en $(0,0)$.

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^2 \geqslant 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$.
- $\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f(0, y) = -y^2 \leqslant 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de minimum en $(0, 0)$.

On a vu que $(0, 0)$ est un point col de f.

VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^2 \geqslant 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$.
- $\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f(0, y) = -y^2 \leqslant 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de minimum en $(0, 0)$.

On a vu que $(0, 0)$ est un point col de f.

Finalement, f n'admet pas d'extremum local.

Méthode 2 :

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω. L'étude des points extrémaux est simple :

1. Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Méthode 2 :

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω. L'étude des points extrémaux est simple :

1. Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Méthode 2 :

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω. L'étude des points extrémaux est simple :

1. Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x,y) = x^2 + y^2$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Chercher les points critiques de f. Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.

Méthode 2 :

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω. L'étude des points extrémaux est simple :

1. Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x,y) = x^2 + y^2$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Chercher les points critiques de f. Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.
4. Pour chaque point critique (x_0, y_0), étudier le signe de $f(x,y) - f(x_0, y_0)$, au voisinage de (x_0, y_0) pour savoir si c'est un extremum local, puis globalement le cas échéant.

Méthode 2 :

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω. L'étude des points extrémaux est simple :

1. Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Chercher les points critiques de f. Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.
4. Pour chaque point critique (x_0, y_0), étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, au voisinage de (x_0, y_0) pour savoir si c'est un extremum local, puis globalement le cas échéant.

La dernière étape se fait manuellement, pensez aux identités remarquables ! L'année prochaine vous verrez de nouveaux outils pour systématiser cette étape.

Exercice 15 :

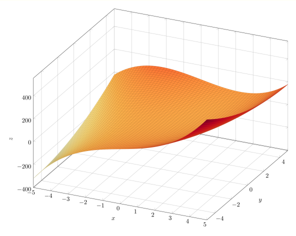
Étudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

Exercice 15 :

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

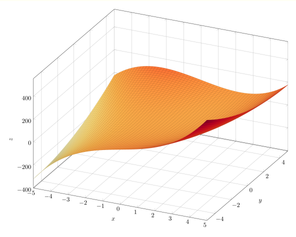
1. $(x\,;y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

1. 

Exercice 15 :

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
2. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.

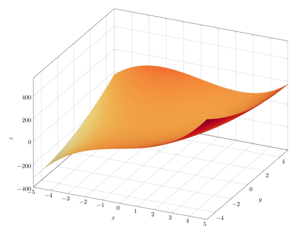
1 

VII. Extrema

Exercice 15 :

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2.$
2. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + (x+y-1)^2 + y^2.$

1


2