XXV

Dimension finie

Un mathématicien et un ingénieur assistent à une conférence sur les processus physiques intervenant dans les espaces de dimension 9. Le mathématicien est assis et apprécie beaucoup la conférence, pendant que l'ingénieur fronce les sourcils et semble complètement embrouillé.

À la fin, l'ingénieur demande au matheux :

« Comment fais-tu pour comprendre tout cela ? »

« C'est simple ! D'abord tu visualises le processus en dimension n, et ensuite il suffit de prendre $n = 9$. »

Contenu

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ réduit à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Familles finies de vecteurs

I.1 Indépendance linéaire

Définition/Théorème 1 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

- On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *liée* si

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \cdots, 0)\}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}. \qquad (\mathbb{L}\text{iée})$$

- On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *libre* si elle n'est pas liée *i.e.* si

$$\forall\, (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}} \implies \forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0 \right). \qquad (\mathbb{L}\text{ibre})$$

On dit alors que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *linéairement indépendante.*

Remarque : Une famille contenant le vecteur nul est liée et on convient que toute famille à zéro éléments est libre.

Avant d'aller plus avant et pour que ce soit bien clair revenons sur l'affirmation logique implicite contenue dans la définition (1) à savoir $\rceil(\mathbb{L}\text{iée})=(\mathbb{L}\text{ibre})$:

Notons pour cela $\mathcal{P} : (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ et $\mathcal{Q} : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}$.

La proposition $(\mathbb{L}\text{iée})$ se réécrit alors :

$$(\mathbb{L}\text{iée}) : \exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \rceil\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q},$$

dont la proposition contraire s'écrit :

$$\begin{aligned} \rceil(\mathbb{L}\text{iée}) \iff (\mathbb{L}\text{ibre}) : \forall\, (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ & \rceil\left(\rceil\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}\right) \\ & \left(\mathcal{P} \vee \rceil\mathcal{Q}\right) \\ & \left(\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}\right) \\ & \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}} \implies \forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0. \end{aligned}$$

Exemples 1 :

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1\,; \mathrm{i})$ est libre, puisque pour tout $(a\,; b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a + \mathrm{i}\, b = 0 \implies a = b = 0.$$

En revanche, dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1\,; \mathrm{i})$ est liée puisque

$$i.1 + (-1).i = 0.$$

- Dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1,\, \mathrm{X},\, \mathrm{X}^2,\, \dots,\, \mathrm{X}^n)$ est une famille libre.

En effet, un polynôme est nul si, et seulement si tous ses coefficients le sont ce qui se traduit par :

$$\forall\, (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{X}^k = 0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]} \implies \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k = 0.$$

Corollaire 0.1 : Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E.
Pour tous $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \implies \forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \lambda_k = \mu_k.$$

Exercice 1 : Montrer que la famille $(\cos\,;\sin)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Corollaire 0.2 (Important) : Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre si, et seulement si tout vecteur de $\operatorname{vect}(\{x_1, \cdots, x_n\})$ se décompose **de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$.

Exemples 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-ev E.

- Si $n = 0$: la famille vide est libre (convention).
- Si $n = 1$: la famille (x_1) est libre $\iff x_1 \neq 0_E$.
- Si $n = 2$: la famille (x_1, x_2) est libre $\iff x_1$ et x_2 sont non colinéaires.

Preuve :

- *Si x_1 et x_2 sont colinéaires (ou nuls), on peut écrire $x_1 = \lambda x_2$ i.e. $1x_1 - \lambda x_2 = 0$: la famille est liée.*
- *Réciproquement, si la famille (x_1, x_2) est liée, on peut écrire $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Si $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $x_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$ et les vecteurs sont colinéaires. Idem si $\lambda_2 \neq 0$ et on ne peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par hypothèse.*

Exercice 2 : Soit $x_1 = (1\,;1\,;1)$, $x_2 = (1\,;2\,;-1)$ et $x_3 = (-1\,;1\,;1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $(x_1\,;x_2\,;x_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1 : Une famille est liée si, et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Ceci s'applique, en particulier, à une famille dont deux vecteurs sont égaux et, par conséquent, les vecteurs d'une famille libre sont deux à deux distincts.

Exercice 3 : Soient $u = (1\,;2\,;3)$, $v = (3\,;2\,;1)$ et $w = (5\,;6\,;7)$.
Montrer que (u, v, w) est liée.

Corollaire 1.1 (Application) : Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E et $x \in$ E.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) \text{ est liée } \iff x \in \operatorname{vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$$

Exemple 3 : On déduit également de la proposition précédente qu'une famille de trois vecteurs non coplanaires est libre.

En effet, si $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est liée, alors, par exemple, e_1 appartient à $\operatorname{vect}(e_2\,;e_3)$ et les trois vecteurs seraient coplanaires.

ATTENTION

Une famille de trois vecteurs $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre.

Prendre par exemple $\{\,(1\,;-1\,;0)\,;\,(0\,;1\,;-1)\,,\,(-1\,;0\,;1)\,\}$.

Corollaire I.2 : Une famille est libre si, et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition 2 :

1. Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
2. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

I.2 Un exemple important

Définition 2 : Une famille $(\mathrm{P}_0, \cdots, \mathrm{P}_n)$ de polynômes est dite *de degrés échelonnés* si

$$\deg(\mathrm{P}_0) < \cdots < \deg(\mathrm{P}_n).$$

Proposition 3 : Une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et de degrés échelonnés est libre.

Exemple 4 : $\left(1,\,\mathrm{X}+1,\,\mathrm{X}^3-\mathrm{X}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Corollaire 3.1 (Important) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\left(1,\,\mathrm{X},\,\mathrm{X}^2,\,\ldots,\,\mathrm{X}^n\right)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ (et $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$).
- $\forall\, a \in \mathbb{K}$, $\left(1,\,\mathrm{X}-a,\,(\mathrm{X}-a)^2,\,\ldots,\,(\mathrm{X}-a)^n\right)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ (et $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$).

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$. Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $\mathcal{A}_n = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, avec $a_1 = (1, 1, 0, \cdots, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $a_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1, 1)$ et $a_n = (1, 0, \cdots, 0, 1)$.
Pour quelles valeurs de n la famille $\mathcal{A}_n$ est-elle libre ?

I.3 Familles génératrices

Définition 3 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$.

On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *génératrice* (de E) lorsque tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $x_1, \cdots, x_n$ ou, de manière équivalente,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ est génératrice } &\Longleftrightarrow \operatorname{vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = E.\\ &\Longleftrightarrow \forall\, x \in E,\ \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \;/\; x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.\end{aligned}$$

Exemples 5 :

- $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

  D'une manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque tout polynôme P de degré au plus n s'écrit sous la forme $P = \sum_{i=1}^{n} p_i X^i$ où $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
- $(1, X, X^2, X+1, X^2+X+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 1. La famille $(1\,;\,i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  2. La famille (1) est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  3. La famille $(1\,;\,j)$ engendre aussi le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{C}$.

     En effet, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \iff i = \frac{1}{\sqrt{3}}.1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.j$ et on a aussi facilement $1 = 1.1 + 0.j$.

     Tout nombre complexe, combinaison linéaire de 1 et i, est donc également combinaison linéaire de 1 et j *i.e.* $(1\,;\,j)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

     Remarque : On peut également montrer que $(i\,;\,j)$ engendre également le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 5 : Montrer que la famille $\big((1\,;1\,;0), (0\,;1\,;1), (1\,;0\,;1), (0\,;0\,;1)\big)$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

Est-elle libre ?

Exemples 6 (Usuels) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ où

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ e_i = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \underset{i^{\text{ème}}\text{ composante}}{\underset{\uparrow}{1}},\ 0).$$

2. De la même manière, tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *i.e.* comme combinaison linéaire des polynômes 1, X, ..., X^n.

   Il en résulte que $\mathbb{K}_n[X] = \operatorname{vect}(1, X, \ldots, X^n)$ *i.e.* $(1, X, \ldots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Mieux, d'après la formule de Taylor, la famille $\Big(1,\ X-a,\ (X-a)^2,\ \ldots,\ (X-a)^n\Big)$ est également une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 4 : Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille génératrice d'éléments de E.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \text{ est génératrice de E} \iff x_n \in \operatorname{vect}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}).$$

Exercice 6 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$, on considère le sev $\mathrm{F} = \{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-2z=0 \}$. Déterminer une famille génératrice de F.

I.4 Bases

Définition 4 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in \mathrm{E}^n$.

On dit que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une *base* de E si, et seulement si elle est libre et génératrice.

On convient que $\varnothing$ est une base de $\{0\}$.

Exemple 7 :

1. Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, toute famille constituée de deux vecteurs non colinéaires est une base.

   Classiquement, $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}_2$ mais aussi $(\vec{u}\,;\vec{v})$ où $\vec{u}\,(1\,;2)$ et $\vec{v}\,(1\,;0)$ par exemple.
2. $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ admet pour base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ mais aussi $(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2, 1+\mathrm{X}, 2)$: les bases ne sont donc pas uniques.

   La base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ est appelée *base canonique* de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

   Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ et $(1, \mathrm{X}-a, \dots, (\mathrm{X}-a)^n)$, $a \in \mathbb{K}$ sont des bases de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
3. $\mathbb{R}^3$ admet pour base $\mathcal{B}_1 = (u, v, w)$, avec $u = (1,2,3)$, $v = (0,1,2)$ et $w = (0,0,1)$, mais aussi $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. $\mathcal{B}_0$ est la *base canonique* de $\mathbb{R}^3$.
4. $\mathbb{R}^n$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, avec $e_k = (\delta_{1,k}, \delta_{2,k} \cdots, \delta_{n,k})$.

   $$\text{où} \quad \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases} \qquad \text{appelé Symbole de Kronecker.}$$

   - $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$: la famille est génératrice ;
   - $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0 \implies (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0 \iff \forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \alpha_i = 0$: la famille est libre.
5. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \cdots, \mathrm{E}_{n,p},)$ où :

$$\mathrm{E}_{k,l} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & \uparrow l & & & \end{array} & \end{array}$$

$$\forall\, (k\,;l) \in ([\![1\,;n]\!])^2,\ \mathrm{E}_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Les matrices $\mathrm{E}_{k,\ell}$, où l'unique coefficient non nul valant 1 est situé sur la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne sont appelées *matrices élémentaires*.

Théorème 5 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B}(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in \mathrm{E}^n$.

La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de e_1, e_2, ..., e_n.

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n) \text{ est une base de E} \iff \forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ s'appellent *les composantes* ou *les coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

ATTENTION Les coordonnées d'un vecteur dépendent donc de la base $\mathcal{B}$ choisie. Lorsqu'on voudra préciser celle-ci on notera, par exemple,

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}.$$

Exemple 8 :

1. Dans $\vec{\mathcal{E}}_3$, si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base (vecteurs non coplanaires), tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{E}}_3$ peut s'écrire sous la forme :
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$
$(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ sur $\mathcal{B}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $(x\,;y\,;z)$ s'écrit $xe_1 + ye_2 + ze_3$ sur la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
$(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de (x, y, z) sur la base canonique !
3. Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $(1, 5, 2)$ sont les coordonnées de $1 + 5\mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2$ sur la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.
4. L'espace $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-ev : $\mathcal{B} = (1, i)$ est alors une base de ce $\mathbb{R}$-ev :
$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exists!\,(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, z = a.1 + b.\,\mathrm{i} = a + b\,\mathrm{i}\,.$$
En tant que $\mathbb{C}$-ev, l'espace $\mathbb{C}$ admet $\mathcal{B} = (1)$ pour base :
$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ z = z.1 \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 7 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$, on considère $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ la base canonique où $e_1 = (1\,;0)$ et $e_2 = (0\,;1)$.

1. Montrer que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1\,;1)_{\mathcal{B}}$ et $\varepsilon_2 = (-1\,;1)_{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u = (3\,;7)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes du vecteur u dans la base $\mathcal{C}$.

II Dimension d'un espace vectoriel

II.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 5 (Fondamentale) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

On dit que E *est de dimension finie* lorsque E admet une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie.*

Exemples 9 :

- L'ensemble des vecteurs géométriques du plan et de l'espace sont de dimension finie.
- $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie engendré par la base canonique qui compte n vecteurs.
- $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension finie engendré par $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \cdots, \mathrm{X}^n)$.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie engendré par les matrices élémentaires $\mathrm{E}_{k,l}$.
- $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ n'est pas de dimension finie. Pas plus que $\mathrm{P}ol(\mathbb{R})$.

  En effet, une famille finie de polynômes $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n)$ ne peut engendrer $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, car si on note $d = \max(\deg \mathrm{P}_1, \deg \mathrm{P}_2, \cdots, \deg \mathrm{P}_n,)$, tout polynôme de vect $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n,)$ est de degré $\leqslant d$.
- D'une manière générale, les espaces de fonctions $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, ..., $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ qui contiennent $\mathrm{P}ol(\mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

Théorème 6 (Théorème de la base extraite) :

De toute famille génératrice *finie* d'un espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$, on peut extraire une base.

Corollaire 6.1 (Existence de bases dans un espace vectoriel de dimension finie) :

Tout $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie* admet une base (finie).

Théorème 7 (Théorème de la base incomplète) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie*.

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Corollaire 7.1 :

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E à l'aide d'éléments d'une famille génératrice de E.

II.2 Cardinal des bases en dimension finie

Lemme 1 : Si une famille de n vecteurs $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ engendre une famille de $n+1$ vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$, alors la seconde est liée.

Corollaire 7.2 : Si E admet une famille génératrice $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ finie, alors toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n.

En particulier, toute base est de cardinal inférieur ou égal à n.

Il n'y a donc pas de famille libre de cardinal strictement supérieur à celui d'une famille génératrice.

Théorème 8 : Dans un $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie*, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Définition 6 (Dimension d'un espace vectoriel) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie

On appelle *dimension* de E, notée $\dim(\mathrm{E})$, le cardinal de chacune de ses bases.

Remarque : Par convention, $\varnothing$ est une base de $\{0\}$, d'où $\dim\{0\} = 0$ et, lorsqu'il y aura ambiguïté sur le corps de base, on n'hésitera pas à noter $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ au lieu de $\dim(\mathrm{E})$.

Exemples 10 :

- La dimension de l'ensemble des vecteurs du plan (respectivement de l'espace) est 2 (respectivement 3).
- $\dim \mathbb{K}^n = n$ car admet pour base $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ...$(0, 0, \ldots, 1)$.

- $\dim \mathbb{K}_n[X] = \mathbf{n+1}$ car admet pour base $(1, X, \dots, X^n)$.
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$ car admet pour base $(E_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant p}}$.
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ dont une base est $(1\,;\,i)$ et et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ dont une base est (1) ou (i).

Exercice 8 : Déterminer une base et la dimension de $E = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$.

Proposition 9 (Produit cartésien d'espaces de dimension finie) : Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $E \times F$ est de dimension finie, et :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)\,.$$

$$\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \dim(E_k).$$

En particulier, si $E_1 = \dots = E_n = \mathbb{K}$, on retrouve $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

II.3 Dimension et cardinal des familles

Théorème 10 (Familles libres) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$.

On dira que toute famille libre d'un espace de dimension n admet au plus n éléments.

Corollaire 10.1 : Toute famille libre de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$.

Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$.

Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Théorème 11 (Familles génératrices) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est génératrice, alors $p \geqslant n$.

On dira que toute famille génératrice d'un espace de dimension n admet au moins n éléments.

Corollaire 11.1 :

Toute famille génératrice de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.

Théorème 12 (Synthèse) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est libre} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est génératrice de E.}$$

Méthode 1 (Montrer qu'une famille est une base) : Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace, il suffit de prouver qu'une famille de n vecteurs est libre ou génératrice pour montrer qu'elle est une base.

Exemple 11 : Notons $T_i \in \mathbb{R}[X]$ le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.

Les exercices sont nombreux où l'on montre que la famille $(T_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est une famille échelonnée. Elle est donc libre.

De cardinal $n+1$, la famille $(T_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

En particulier, on pourra décomposer tout polynôme de degré inférieur à n en fonction des polynômes T_i, $i \in [\![0\,;n]\!]$.

Le raisonnement est et sera identique avec toutes les familles de polynômes échelonnée par les degrés que vous devriez rencontrer sous peu : de Taylor, de Bernoulli, de Bernstein, de Fibonacci, de Gegenbauer, de Hermite, de Hilbert, de Jacobi, de Laguerre, de Legendre, de Tchebychev, orthogonaux, ...

Exercice 10 : $P_0 = 2, \quad P_1 = 3X - 4, \quad P_2 = X^2 - 2X + 3.$

Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

III SOUS-ESPACES VECTORIELS

III.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 13 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sev de E.

Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Méthode 2 (Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux) : Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps. Pour montrer que $F = E$, il suffit de montrer que F est un sev de E et que $\dim(F) = \dim(E)$.

Exercice 11 : Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de la forme :

$$aX^4 + (a+b)X, \qquad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$, et en donner une base.

Définition 7 (Sous-espaces remarquables) :

- On appelle *droite vectorielle* tout espace vectoriel (ou sev) de dimension 1.
- On appelle *plan vectoriel* tout espace vectoriel (ou sev) de dimension 2.
- Dans un espace de dimension finie n ($n \geqslant 1$), on appelle *hyperplan* tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Exemples 12 :

- Les droites vectorielles sont les sous-espaces vectoriels de la forme $\text{vect}\,(x)$ où x un vecteur non nul.
- Les plans vectoriels ceux de la forme $\text{vect}\,(x\,;y)$ où x et y sont deux vecteurs non colinéaires.

III.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 8 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ une famille d'éléments de E.

On appelle *rang de* $(u_1, \dots, u_p)$, noté $\text{rg}\,(u_1, \dots, u_p)$, la dimension du sous-espace engendré par cette famille :

$$\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim\left(\text{vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_p)\right).$$

Remarque : Le rang est bien défini puisque $\text{vect}\,(u_1, \dots, u_p)$ est de dimension finie. En effet, il admet évidemment $(u_1, \dots, u_p)$ comme famille génératrice finie.

Exemple 13 : Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $u = (1\,;2\,;3)$, $v = (1\,;1\,;0)$ et $w = (3\,;4\,;3)$.

1. On a $w = u + 2v$, donc $\text{vect}\,(u, v, w) = \text{vect}\,(u, v)$.
2. $u \notin \text{vect}\,(v)$ donc la famille (u, v) est libre. Par définition, elle engendre $\text{vect}\,(u, v)$.
3. Par conséquent, (u, v) est une base de $\text{vect}\,(u, v)$ *i.e.* $\dim \text{vect}\,(u, v) = 2$.
4. Ainsi, $\text{rg}\,(u, v, w) = \dim \text{vect}\,(u, v, w) = \dim \text{vect}\,(u, v) = 2$.

Proposition 14 : Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E, un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Alors :

1. $\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant n$.
2. $\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant p$.

En particulier, $\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant \min\,(n\,;p)$.

3. $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre si, et seulement si $\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = p$.

Exemple 14 : Déterminons le rang de la famille suivante :

$$x_1\,(1\,;-1\,;1)\,,\ x_2\,(-1\,;1\,;-1)\,,\ x_3\,(0\,;1\,;1)\,,\ x_4\,(1\,;0\,;2)\,.$$

1. Nous avons quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. On sait déjà que cette famille est nécessairement liée.

2 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$. On a :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & & & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient un système homogène, échelonné réduit. Il possède deux inconnues principales λ_1 et λ_3, deux inconnues paramètres λ_2 et λ_4 (on retrouve bien que cette famille est liée).

En particulier,

- pour $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, $x_2 = -x_1$.
- pour $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_4 = 1$, $x_4 = x_1 + x_3$.

Ainsi, $\operatorname{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{vect}(x_1, x_3)$.

3 Comme la famille (x_1, x_3) est libre (deux vecteurs non colinéaires, ou autrement en prenant $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ dans le système ci-dessus), on en déduit que

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2.$$

À retenir 1 (Opérations ne changeant par le rang) :

- Retirer un vecteur nul :
$$\operatorname{rg}(u, v, 0, w) = \operatorname{rg}(u, v, w).$$
- Retirer un vecteur figurant plusieurs fois (en en conservant un !) :
$$\operatorname{rg}(u, v, w, v, u, w, w, w) = \operatorname{rg}(u, v, w).$$
- Retirer un vecteur combinaison linéaire des *autres* vecteurs :
$$\operatorname{rg}(u, v, 2u + 3v) = \operatorname{rg}(u, v).$$
- Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des *autres* vecteurs :
$$\operatorname{rg}(u, v, w) = \operatorname{rg}(u, v, w + 2u + 3v).$$
- Ajouter des multiples d'un vecteurs aux *autres* vecteurs :
$$\operatorname{rg}(u, v, w) = \operatorname{rg}(u, v - 2u, w + 7u).$$

Exercice 12 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère :

$$u = (1, 2, 3, 4), \quad v = (4, 3, 2, 1), \quad w = (1, 2, 1, 2), \quad x = (2, 1, 2, 1), \quad y = (1, 1, 1, 1).$$

Déterminer $\operatorname{rg}(u, v, w, x, y)$.

III.3 Sous-espaces supplémentaires

Théorème 15 (Base adaptée) : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $(f_1, \dots, f_p) \in \mathrm{F}^p$ et $(g_1, \dots, g_q) \in \mathrm{G}^q$ des familles de vecteurs de F et G.

1. Si $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_q)$ sont libres et si $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est directe, alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre.
2. Si $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_q)$ sont génératrices (de F et G respectivement) et si $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est génératrice de E.
3. Si $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_q)$ sont des bases de F et G respectivement et si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E.

   Cette base est dite *adaptée* a la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exemple 15 : Soient $\mathrm{F} = \{(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,((1\,;1\,;1))$.

- Le vecteur $e_3 = (1\,;1\,;1)$ engendre G et est non nul. Donc (e_3) est une base de G.
- On a montré que $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(e_1 = (1\,;0\,;-1)\,; e_2 = (0\,;1\,;-1))$.

  Donc (e_1, e_2) est une famille génératrice de F. Comme c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est également libre.

  Ainsi (e_1, e_2) est une base de F.
- On a montré que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. On déduit de la propriété précédente que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 : Soient $\mathrm{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^2$ et en donner une base.
2. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Proposition 16 : Soient $(e_1, \dots e_n) \in \mathrm{E}^n$, $p \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(e_1, \dots, e_p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre alors $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe.
2. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E alors $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$.
3. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors F et G sont supplémentaires dans E.

Corollaire 16.1 : Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. $\dim(\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})$
2. Si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E})$.

Théorème 17 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie n*.

Tout sev de E admet au moins un sous-espace supplémentaire dans E.

Corollaire 17.1 (Formule de Grassmann) : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E.

Alors :
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G).$$

Exemple 16 : Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons l'intersection de deux plans vectoriels P_1, P_2 non confondus.

1. Comme $P_1 + P_2 \subset E$, on a $\dim(P_1+P_2) \leqslant 3$ donc :
$$\dim(P_1\cap P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(P_1+P_2) \geqslant 2+2-3 = 1,$$
ce qui prouve que $P_1 \cap P_2$ n'est pas réduit à $0_{\mathbb{R}^3}$.
2. Comme P_1 et P_2 ne sont pas confondues, P_1 est strictement inclus dans $P_1 + P_2$ donc
$$2 = \dim(P_1) < \dim(P_1+P_2) \leqslant 3.$$

Ainsi, $\dim(P_1+P_2) = 3$ et donc $\dim(P_1\cap P_2) = 1$: L'intersection des deux plans P_1 et P_2 est une droite vectorielle.

On retiendra surtout comment montrer que deux espaces sont supplémentaires :

À retenir 2 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E. Alors :

$$(i).\ F\oplus G = E \iff (ii).\ \begin{cases} F\cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$
$$\iff (iii).\ \begin{cases} F+G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E). \end{cases}$$

Exemple 17 (Important) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et H un hyperplan de E de dimension $n-1$. Alors pour tout $a \in E\setminus H$, on a :
$$H \oplus \mathbb{K}a = E.$$

En effet,

1. En remarquant que a ne peut être nul sans appartenir à H, on a :
$$\dim(H) + \dim(\mathbb{K}a) = n = \dim(E).$$
2. Comme $H\cap \mathrm{vect}(a) \subset \mathrm{vect}(a)$ alors $\dim(H\cap\mathrm{vect}(a)) = 0$ ou 1.

   Si c'est 1, alors $H\cap\mathrm{vect}(a) = \mathrm{vect}(a)$ et a appartiendrait à H, ce qui est faux.

   Donc $\dim(H\cap\mathrm{vect}(a)) = 0$ et $H\cap\mathrm{vect}(a) = \{0_E\}$.

Les sev H et $\mathrm{vect}(a)$ sont donc en somme directe dans E : tout espace se décompose de manière directe en un hyperplan et une droite vectorielle.

ATTENTION Rien ne dit que cette décomposition est unique ! C'est l'écriture dans ces décompositions qui l'est !

Exercice 14 : On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Montrer que $\mathrm{vect}(1, X, 1+X+X^2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.