Dimension finie

I Familles libres, liées. Bases

Exercice 1 : Soient $u = (1\,;2\,;3)$, $v = (0\,;1\,;2)$ et $w = (0\,;0\,;1)$.

1. Montrer que $(u\,;v\,;w)$ est libre.
2. Trouver la décomposition de $(5,6,7)$ comme combinaison linéaire de u, v, w.

Exercice 2 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$, on considère $v_1 = (1\,;2)$, $v_2 = (3\,;1)$ et $v_3 = (-5\,;0)$.

Montrer que $\text{vect}\,(v_1, v_2) = \text{vect}\,(v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 3 :

1. La famille $((5,-2,-3),(4,1,-3),(-2,-7,3))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. Soient $P_1 = X - 1$ et $P_2 = X^2 - 1$.

   Montrer que (P_1, P_2) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n,\ v_n = 3^n,\ w_n = 4^n.$

   Montrer que la famille $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. Dans un $\mathbb{R}$-ev à préciser, montrer que la famille $(x \longmapsto e^x\,; x \longmapsto e^{2x}\,; x \longmapsto e^{3x})$ est libre.

Exercice 4 : La famille A engendre-t-elle l'espace vectoriel E ?

1. $A = ((1,1))$ et $E = \mathbb{R}^2$
2. $A = ((1,1))$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$
3. $A = ((1,1))$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$
4. $A = ((1,1),(1,-1))$ et $E = \mathbb{R}^2$
5. $A = ((1,1),(1,-1),(1,0))$ et $E = \mathbb{R}^2$
6. $A = ((1,0,1),(0,1,1))$ et $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$

Exercice 5 : Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, x = 2\alpha - 5\beta, y = -\alpha + 3\beta, z = 7\beta\}$.

Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$, et que tout élément de E est combinaison linéaire de deux éléments qu'on déterminera.

Exercice 6 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le sev $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P(1) = P(-1) = 0.\}$.

Montrer que F est une droite vectorielle engendrée par un polynôme P_0 que l'on déterminera.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x_1 = (-1,1,1)$, $x_2 = (1,-1,1)$ et $x_3 = (1,1,-1)$.

Démontrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$.

Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 9 : Montrer que $((0;1;1);(1;0;1);(1;1;0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 : Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivant :

1. $E_1 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -x+3y+z=0\}$.
2. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, a+d=0 \right\}$.
3. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 12 : Redémontrer le théorème de Taylor pour les polynômes.

Exercice 13 (Polynômes factoriels ou de Hilbert) : On considère les polynômes suivants :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \frac{X(X-1)}{2} \text{ et } P_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}.$$

1. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.
2. Décomposer X^3 dans cette base.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. On pose :

$$\alpha_0 = P(0), \alpha_1 = P(1) - P(0), \alpha_2 = P(2) - 2P(1) + P(0), \alpha_3 = P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0)$$
$$\text{et } Q = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3.$$

Calculer $Q(k)$ pour $k \in [\![0;3]\!]$. Que peut-on en déduire ?

III Sous-espaces

Exercice 14 : Calculer le rang de chaque famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. $x_1 = (1,1,1,1)$, $x_2 = (0,1,2,-1)$, $x_3 = (1,0,-2,3)$, $x_4 = (2,1,0,-1)$
2. $x_1 = (1,0,1,0)$, $x_2 = (2,1,0,1)$, $x_3 = (0,2,-1,1)$, $x_4 = (3,-1,2,0)$
3. $x_1 = (2,3,5)$, $x_2 = (-1,2,-3)$, $x_3 = (4,-3,8)$, $x_4 = (-4,17,-10)$
4. $x_1 = (2,-3,4)$, $x_2 = (3,1,5)$, $x_3 = (-1,0,1)$, $x_4 = (0,2,4)$

Exercice 15 : Dans $\mathbb{R}^3$, discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de $\text{vect}\,(u,v,w)$ avec $u = (a,1,1)$, $v = (1,a,1)$ et $w = (1,1,a)$.

Exercice 16 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (0,1,2,3)$, $v = (1,1,1,1)$, $w = (1,1,1,-4)$, et l'ensemble $P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\}$.

1. Vérifier que P est un sev de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $P + \text{vect}\,(u,v) = \mathbb{R}^4$, mais que $P \cup \text{vect}\,(u,v) \neq \mathbb{R}^4$.
3. Montrer que P et $\text{vect}\,(u,v)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
4. Montrer que la famille (u,v,w) est libre.

Exercice 17 : On considère pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ les fonctions suivantes :

$$f_k : \theta \mapsto \cos(k\theta) \text{ et } g_k : \theta \mapsto (\cos(\theta))^k.$$

On notera $f_0 = g_0$ la fonction constante égale à 1.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ est libre.

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

3 Utilisation des polynômes de Tchebychev

On admet qu'il existe une suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré au plus n et :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, vect $(g_0, g_1, \dots, g_n) =$ vect $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.