

Dimension finie

I FAMILLES LIBRES, LIÉES. BASES

Exercice 1 : Soient $u = (1; 2; 3)$, $v = (0; 1; 2)$ et $w = (0; 0; 1)$.

- 1 Montrer que $(u; v; w)$ est libre.
- 2 Trouver la décomposition de $(5, 6, 7)$ comme combinaison linéaire de u, v, w .

Correction : $(5; 6; 7) = 5u - 4v$.

Exercice 2 : Dans le \mathbb{R} -ev \mathbb{R}^2 , on considère $v_1 = (1; 2)$, $v_2 = (3; 1)$ et $v_3 = (-5; 0)$.

Montrer que $\text{vect}(v_1, v_2) = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 3 :

- 1 La famille $((5, -2, -3), (4, 1, -3), (-2, -7, 3))$ est-elle libre dans \mathbb{R}^3 ?
- 2 Soient $P_1 = X - 1$ et $P_2 = X^2 - 1$.
Montrer que (P_1, P_2) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
- 3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n, v_n = 3^n, w_n = 4^n$.
Montrer que la famille $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- 4 Dans un \mathbb{R} -ev à préciser, montrer que la famille $(x \mapsto e^x; x \mapsto e^{2x}; x \mapsto e^{3x})$ est libre.

Exercice 4 : La famille A engendre-t-elle l'espace vectoriel E ?

- 1 A = $((1, 1))$ et E = \mathbb{R}^2
- 2 A = $((1, 1))$ et E = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$
- 3 A = $((1, 1))$ et E = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$
- 4 A = $((1, 1), (1, -1))$ et E = \mathbb{R}^2
- 5 A = $((1, 1), (1, -1), (1, 0))$ et E = \mathbb{R}^2
- 6 A = $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ et E = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$

Exercice 5 : Soit E = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = 2\alpha - 5\beta, y = -\alpha + 3\beta, z = 7\beta\}$.

Montrer que E est un sev de \mathbb{R}^3 , et que tout élément de E est combinaison linéaire de deux éléments qu'on déterminera.

Exercice 6 : Dans le \mathbb{R} -ev $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le sev F = $\{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(1) = P(-1) = 0\}$.

Montrer que F est une droite vectorielle engendrée par un polynôme P_0 que l'on déterminera.

Exercice 7 : Dans \mathbb{R}^3 , on pose $x_1 = (-1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$ et $x_3 = (1, 1, -1)$.

Démontrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

Correction : Soient trois réels a, b et c tels que :

$$\begin{aligned} a(-1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1) = 0 &\Leftrightarrow (-a + b + c, a - b + c, a + b - c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille (x_1, x_2, x_3) est donc libre.

Montrons qu'elle est génératrice :

- **Méthode 1** Soit $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} a(-1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1) = (A, B, C) &\Leftrightarrow (-a + b + c, a - b + c, a + b - c) = (A, B, C) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c = A \\ a - b + c = B \\ a + b - c = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{B+C}{2} \\ b = \frac{A+C}{2} \\ c = \frac{A+B}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc tout vecteur $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de (x_1, x_2, x_3) .

La famille (x_1, x_2, x_3) est donc génératrice.

Finalement, libre et génératrice de \mathbb{R}^3 , (x_1, x_2, x_3) en est une base.

- **Méthode 2** Comme (x_1, x_2, x_3) est libre et compte trois vecteurs en dimension 3, la famille (x_1, x_2, x_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$.

Montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction :

- Supposons que $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$.

$$\begin{array}{l} \lambda_0 \times \left| \begin{array}{l} P_0 = (X-1)^n = (-1)^n + \dots \\ P_1 = X(X-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}X + \dots \\ P_2 = X^2(X-1)^{n-2} = (-1)^n X^2 + \dots \end{array} \right. \end{array}$$

- D'où $(-1)^n \lambda_0 + \dots = 0$

Par identification, on déduit que $\lambda_0 = 0$.

- Il reste $\sum_{k=1}^n \lambda_k P_k = 0$, i.e. $(-1)^{n-1} \lambda_1 X + \dots = 0$.

Par identification, on déduit que $\lambda_1 = 0$.

On itère, et on obtient : $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

La famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est libre.

- Cette famille libre compte $n+1$ vecteurs en dimension $n+1$.

Donc (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : On pourrait parler ici d'une famille échelonnée par les valuations.

II DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Exercice 9 : Montrer que $((0; 1; 1); (1; 0; 1); (1; 1; 0))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 10 : Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivant :

1 $E_1 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 3y + z = 0\}$.

2 $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a + d = 0 \right\}$.

3 $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : Dans \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ? Si oui, en donner une base.

Correction :

1 On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 :

⊙ l'origine $(0, 0, 0, 0)$ est dans E,

⊙ si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ et $v' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in E$ alors $v + v' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, x_4 + x'_4)$ a des coordonnées qui vérifient l'équation et donc $v + v' \in E$.

⊙ si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les coordonnées de $\lambda \cdot v = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ vérifient l'équation et donc $\lambda \cdot v \in E$.

2 Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E.

Comme E est dans \mathbb{R}^4 , il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $v_1 = (1, -1, 0, 0)$.

Il est bien clair que v_1 n'engendre pas tout E, on cherche donc un vecteur v_2 linéairement indépendant de v_1 , prenons $v_2 = (1, 0, -1, 0)$. Alors $\{v_1, v_2\}$ n'engendrent pas tout E; par exemple $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ est dans E mais n'est pas engendré par v_1 et v_2 .

Montrons que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.

⊙ (v_1, v_2, v_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha &= 0 \\ -\beta &= 0 \\ -\gamma &= 0 \end{cases} & \\ \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 & \end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

⊙ Montrons que la famille est génératrice : soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$.

Il faut écrire v comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 . On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v$.

On obtient que $v = -x_2 v_1 - x_3 v_2 - x_4 v_4$ (on utilise $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

Bien sûr, vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Exercice 12 : Redémontrer le théorème de Taylor pour les polynômes.

Exercice 13 (Polynômes factoriels ou de Hilbert) : On considère les polynômes suivants :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \frac{X(X-1)}{2} \text{ et } P_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}.$$

- 1 Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.
- 2 Décomposer X^3 dans cette base.
- 3 Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. On pose :

$$\alpha_0 = P(0), \alpha_1 = P(1) - P(0), \alpha_2 = P(2) - 2P(1) + P(0), \alpha_3 = P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0)$$

$$\text{et } Q = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3.$$

Calculer $Q(k)$ pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$. Que peut-on en déduire ?

Correction :

- 1 On sait que $\dim \mathbb{K}_3[X] = 4$ et on a $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$.

On a donc une famille échelonnée en degré de 4 polynômes de $\mathbb{K}_3[X]$, donc (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

- 2 On sait qu'il existe a_0, a_1, a_2 et $a_3 \in \mathbb{K}$ tels que $X^3 = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3$.

$$\text{Or, } P_2 = \frac{X^2 - X}{2} \text{ et } P_3 = \frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{6}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} X^3 &= a_0 + a_1 X + \frac{a_2}{2} (X^2 - X) + \frac{a_3}{6} (X^3 - 3X^2 + 2X) \\ &= a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{6} \right) X + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2} \right) X^2 + \frac{a_3}{6} X^3. \end{aligned}$$

Deux polynômes étant égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, on a :

$$X^3 = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ 6a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ a_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 6 \\ a_3 = 6 \end{cases}$$

En conclusion, $X^3 = 0P_0 + P_1 + 6P_2 + 6P_3$.

- 3 Le calcul donne :

$$Q(0) = \alpha_0 P_0(0) + \alpha_1 P_1(0) + \alpha_2 P_2(0) + \alpha_3 P_3(0) = \alpha_0 = P(0).$$

$$Q(1) = \alpha_0 P_0(1) + \alpha_1 P_1(1) + \alpha_2 P_2(1) + \alpha_3 P_3(1) = \alpha_0 + \alpha_1 = P(1).$$

$$Q(2) = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = P(0) + 2P(1) - 2P(0) + P(2) - 2P(1) + P(0) = P(2).$$

$$Q(3) = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$$

$$\begin{aligned} &= P(0) + 3P(1) - 3P(0) + 3P(2) - 6P(1) + 3P(0) + P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0) \\ &= P(3). \end{aligned}$$

Donc $Q(k) = P(k)$ pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$.

Les deux polynômes étant de degré au plus 3 et coïncidant en 4 points distincts, ils sont égaux.

Donc $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$.

En d'autres termes, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont les coordonnées de P dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) .

Un peu d'histoire : Soit $k \geq 1$ un entier. On définit le k -ième polynôme de Hilbert par

$$H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit également $H_0 = 1$.

En généralisant (beaucoup) le résultat de l'exercice, on montre que pour tout polynôme P de degré d à valeurs entières i.e. vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ il existe des entiers m_0, \dots, m_d tels que :

$$P = m_0 H_0 + m_1 H_1 + \dots + m_d H_d.$$

Ce résultat montre en particulier que si P est de degré d et vérifie $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, alors les dénominateurs de ses coefficients sont tous des diviseurs de $d!$.

III SOUS-ESPACES

Exercice 14 : Calculer le rang de chaque famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

1 $x_1 = (1, 1, 1, 1), x_2 = (0, 1, 2, -1), x_3 = (1, 0, -2, 3), x_4 = (2, 1, 0, -1)$

Correction : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.

On a $a(1, 1, 1, 1) + b(0, 1, 2, -1) + c(1, 0, -2, 3) + d(2, 1, 0, -1) = 0$.

$$\text{Donc, } \begin{cases} a + 0b + c + 2d = 0 \\ a + b + 0c + d = 0 \\ a + 2b - 2c + 0d = 0 \\ a - b + 3c - d = 0 \end{cases} \quad \text{et alors } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

La famille (x_1, x_2, x_3, x_4) est libre.

Donc son rang est égal au nombre de ses vecteurs :

$$\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4.$$

Remarque : (x_1, x_2, x_3, x_4) est une base de \mathbb{R}^4 .

2 $x_1 = (1, 0, 1, 0), x_2 = (2, 1, 0, 1), x_3 = (0, 2, -1, 1), x_4 = (3, -1, 2, 0)$

Correction : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.

$$\text{Donc } \begin{cases} a + 2b + 0c + 3d = 0 \\ 0a + b + 2c - d = 0 \\ a + 0b - c + 2d = 0 \\ 0a + b + c + 0d = 0 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = d \end{cases}.$$

On a (par exemple) $-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ donc $x_4 = x_1 + x_2 - x_3$ et $\text{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{vect}(x_1, x_2, x_3)$.

Donc $\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{rg}(x_1, x_2, x_3)$.

La famille (x_1, x_2, x_3) est libre, donc $\text{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3$ et $\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.

3 $x_1 = (2, 3, 5), x_2 = (-1, 2, -3), x_3 = (4, -3, 8), x_4 = (-4, 17, -10)$

Correction : $\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.

4 $x_1 = (2, -3, 4), x_2 = (3, 1, 5), x_3 = (-1, 0, 1), x_4 = (0, 2, 4)$

Correction : $\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.

Exercice 15 : Dans \mathbb{R}^3 , discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de $\text{vect}(u, v, w)$ avec $u = (a, 1, 1), v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$.

Exercice 16 : Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $u = (0, 1, 2, 3), v = (1, 1, 1, 1), w = (1, 1, 1, -4)$, et l'ensemble $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.

- 1** Vérifier que P est un sev de \mathbb{R}^4 . Quelle est sa dimension ?
- 2** Montrer que $P + \text{vect}(u, v) = \mathbb{R}^4$, mais que $P \cup \text{vect}(u, v) \neq \mathbb{R}^4$.
- 3** Montrer que P et $\text{vect}(u, v)$ ne sont pas supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
- 4** Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 17 : On considère pour tout k dans \mathbb{N}^* les fonctions suivantes :

$$f_k : \theta \mapsto \cos(k\theta) \text{ et } g_k : \theta \mapsto (\cos(\theta))^k.$$

On notera $f_0 = g_0$ la fonction constante égale à 1.

- 1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (g_0, g_1, \dots, g_n) est libre.
- 2** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre.
- 3** Utilisation des polynômes de Tchebychev

On admet qu'il existe une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n$ est de degré au plus n et :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \text{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n) = \text{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

Correction :

- 1** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient a_0, a_1, \dots, a_n des réels tels que $\sum_{k=0}^n a_k g_k = 0$. On a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n a_k (\cos(\theta))^k = 0_{\mathbb{R}}.$$

En notant $x = \cos(\theta)$, on a $\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0_{\mathbb{R}}$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Cela montre que le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ admet une infinité de racines. Il est donc nul, donc tous ses coefficients sont nuls.

D'où $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

La famille (g_0, g_1, \dots, g_n) est libre.

- 2** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{P}_n : « la famille (f_0, f_2, \dots, f_n) est libre ».

◇ Initialisation :

Pour $n = 0, \mathcal{P}_0$ est vraie, car f_0 n'est pas la fonction nulle.

◇ Hérité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathcal{P}_n vraie. Soient a_0, a_1, \dots, a_{n+1} des réels tels que :

$$a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n + a_{n+1} f_{n+1} = 0. \quad (\text{XXIV.1})$$

Comme $f_k'' = -k^2 f_k$ en dérivant deux fois (XXIV.1), on obtient :

$$0^2 a_0 f_0 - 1^2 a_1 f_1 - \dots - n^2 a_n f_n - (n+1)^2 a_{n+1} f_{n+1} = 0. \quad (\text{XXIV.2})$$

En formant $(n+1)^2(\text{XXIV.1}) + (\text{XXIV.2})$, on a :

$$((n+1)^2 - 0) a_0 f_0 + \dots + ((n+1)^2 - n^2) a_n f_n = 0. \quad (\text{XXIV.3})$$

D'après \mathcal{P}_n , la famille (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre, donc tous les coefficients de la combinaison linéaire (XXIV.3) sont nuls.

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $((n+1)^2 - k^2) a_k = 0$, donc $a_k = 0$. La relation (XXIV.1) devient $a_{n+1} f_{n+1} = 0$. Donc $a_{n+1} = 0$, car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.

Donc pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $a_k = 0$.

On a montré que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$ est libre.

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

◇ On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre.

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $G_n = \text{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$ et $F_n = \text{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

D'après les questions précédentes, ces deux espaces sont de dimension $n+1$. Il suffit de montrer une inclusion.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En notant $T_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n a_k (\cos(\theta))^k = \cos(n\theta).$$

Ce résultat signifie que $\sum_{k=0}^n a_k g_k = f_n$ i.e. $f_n \in G_n$.

Comme la suite des espaces $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, on a $f_k \in G_n$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Donc $F_n = \text{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) \subset G_n$. En conclusion, $F_n = G_n$.