Dimension finie

1 Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

À quelle condition dit-on que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *liée* ?

. . . .

. . . .

2 Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

À quelle condition dit-on que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *libre* ?

. . . .

. . . .

3 Compléter lorsque que c'est possible :

(a) Toute sous-famille d'une famille libre est ...
(b) Toute sur-famille d'une famille libre est ...
(c) Toute sous-famille d'une famille liée est ...
(d) Toute sur-famille d'une famille liée est ...

4 Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

À quelle condition E est-il de dimension finie ?

. . . .

. . . .

5 Qu'appelle-ton base d'un espace vectoriel ?

. . . .

. . . .

6 Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille d'éléments de E.

Qu'appelle-t-on rang de $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$?

....

....

7 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $(f_1, \dots, f_p) \in F^p$ et $(g_1, \dots, g_q) \in G^q$ des bases respectives de F et G.

À quelle condition $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est-elle une base de E ?

....

....

8 Compléter :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E. Alors :

$$\textit{(i)}.\ F \oplus G = E \iff \textit{(ii)}.\ \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

$$\iff \textit{(iii)}.\ \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E). \end{cases}$$

9 Soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 0\}$.

a Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^2$ et en donner une base.

b Montrer que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned}(x, y) \in F &\iff 2x + y = 0 \\ &\iff y = -2x \\ &\iff (x, y) = (x, -2x) \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -2)\end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que :

- F est un sev de E ;
- $((1, -2))$ est une base de F i.e. $\dim(F) = 1$.

De même,

- $G = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est un sev de E ;
- $((1, 1))$ est une base de G et donc $\dim(G) = 1$.

b Montrons que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

- F et G sont en somme directe. En effet,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

  D'où $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{(0,0)\}$.
- De plus, $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

On conclut que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.