XXVI

Intégration

Ce nouveau chapitre sur l'intégration doit être considéré comme l'unique chapitre sur celle-ci. Le précédent ne s'était concentré que sur la pratique en effleurant à peine la théorie : comment est définie la notion d'intégrale ? Pourquoi ? Quelles sont ses propriétés ?

Nous comblerons ce manque en présentant la construction de l'intégrale de Riemann, qui permet notamment de justifier les calculs d'intégrales de fonctions continues [1]. Théorème connu sous le nom de théorème fondamental de l'analyse..

Cette construction permettra également de voir une intégrale comme limite d'une somme, ouvrant la voie à l'approximation des intégrales dans le cas où on ne sait pas exprimer les primitives et à de nombreux exercices de limites de sommes.

Nous reverrons également également la formule de Taylor mais sous sa forme dite intégrale, résultat qui aura l'avantage d'être global au contraire de la formule de Taylor-Young qui était locale.

Contenu

[1]. On peut faire mieux avec d'autres théories, mais c'est complètement superflu pour nous.

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, on considère deux réels a et b tels que $a < b$. L'intervalle $[a\,;b]$ est donc non trivial.

I Fonctions en escalier

I.1 Subdivision

Définition 1 : On appelle *subdivision* du segment $[a\,;b]$ toute suite finie de réels $s = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Le *pas de la subdivision* est l'écart maximum entre deux termes :

$$\max_{k \in [\![0,n-1]\!]} (a_{k+1} - a_k).$$

L'*image de la subdivision* est l'ensemble $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$.

Remarques :

— Si s est une subdivision de l'intervalle $[a\,;b]$ alors s contient les réels a et b.

— Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on dit que s_1 est plus fine que s_2, noté $s_2 < s_1$, si s_1 contient au moins tous les termes de la subdivision s_2.

— Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on peut définir la subdivision réunion de s_1 et s_2, notée $s_1 \vee s_2$, comme la subdivision de $[a\,;b]$ contenant tous les termes des subdivisions de s_1 et s_2.

On remarquera qu'elle est plus fine que s_1 ET s_2.

Définition 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *subdivision régulière* de $[a\,;b]$, la subdivision $s = (a_1, \dots, a_n)$ définie par :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]\,,\ a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

En particulier, pour une subdivision régulière, $\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]$,

$$a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}.$$

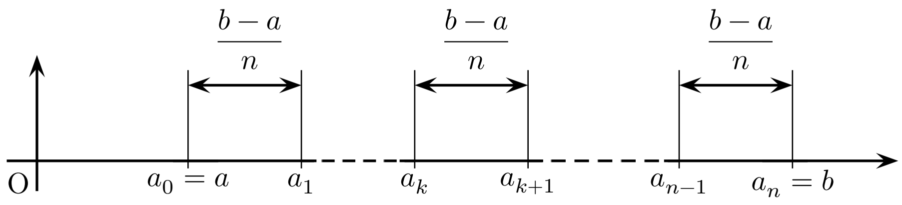


Figure XXVI.1 – Subdivision régulière d'un intervalle $[a\,;b]$

I.2 Fonctions en escalier

Définition 3 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$.

- On dit que f est *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$:

$$\exists\, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ tels que } f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathbb{1}_{]a_k;a_{k+1}[}.$$

  On note $\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.

- On dit alors que la *subdivision* est adaptée à f.

Toute fonction en escalier f vient donc avec au moins une subdivision adaptée à f.

Remarques :

— On parle aussi de fonction *constante par morceaux.*

— **Aucune** condition n'est imposée aux valeurs de $f(a_k)$ mais une subdivision adaptée contient nécessairement tous les points de discontinuité de f.

— Une fonction en escalier est bornée.

En effet, elle prend un nombre fini de valeurs.

Une fonction prenant un nombre fini de valeurs est-elle nécessairement en escalier ?

— Il existe une infinité de subdivisions adaptées à une fonction en escalier : il suffit d'intercaler des termes à la suite.

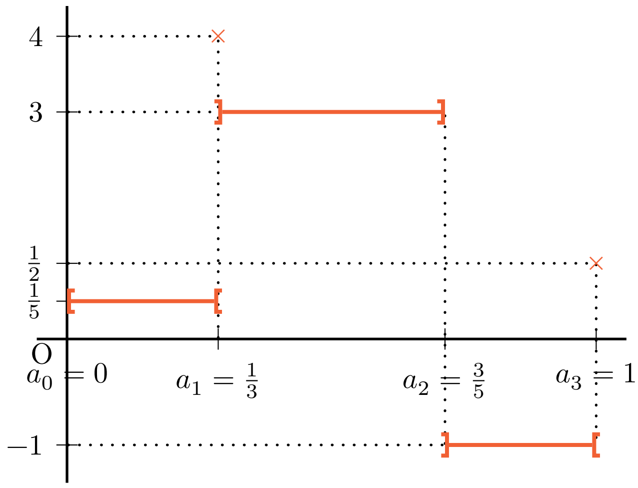
Exemples 1 :

- Une fonction constante est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à toute subdivision de $[a\,;b]$.
- La fonction partie entière est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à la subdivision de $[a\,;b]$ constituée de a, b et de tous les entiers du segment $[a\,;b]$.

Proposition 1 : Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.

Preuve : Soient $= (a_1, \dots, a_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $s' = (a'_1, \dots, a'_p)$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ deux subdivision de $[a\,;b]$ respectivement adaptée à f et g.

$s \vee s'$ est clairement une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f et à g car elle contient tous les termes a_0, ..., a_n, a'_1, ..., a'_p.



$$f : \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si} \quad x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right[\\ 4 & \text{si} \quad x = \frac{1}{3} \\ 3 & \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{3}{5}\right] \\ -1 & \text{si} \quad x \in \left]\frac{3}{5}\,;1\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1. \end{cases} \end{array}$$

Figure XXVI.2 – Exemple de fonction en escalier sur $[0\,;1]$.

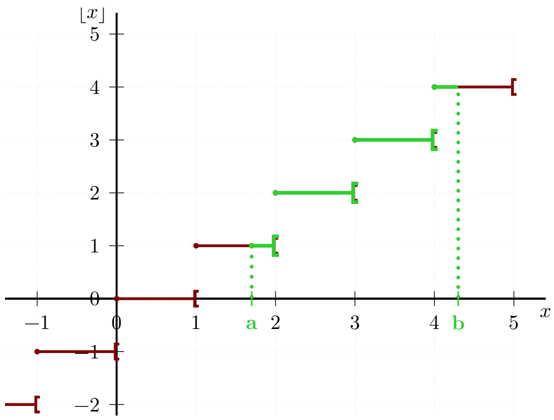


Figure XXVI.3 – La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a\,;b]$.

Intéressons nous un instant à la structure de $\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

Proposition 2 : Soient f, et g en escalier sur $[a\,;b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $f+g$, αf, fg, et $|f|$ sont en escalier sur $[a\,;b]$.

Preuve : D'après la proposition (1), il suffit de se placer sur une subdivision

$$s : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

adaptée à f et g.

Sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ les deux fonctions f et g sont constantes, donc également $f+g$, αf, fg, et $|f|$ qui sont donc en escalier sur $[a\,;b]$ car la subdivision s est adaptée à chacune d'elles.

La fonction nulle étant également une fonction en escalier sur tout intervalle $[a\,;b]$, on en déduit :

Corollaire 21 : L'ensemble $\left(\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})\,;+_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\,;\cdot_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\right)$ est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

II Intégrale des fonctions en escalier

II.1 Construction

Définition/Théorème 4 : Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ une fonction en escalier sur $[a\,;b]$ et $s :\ a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note λ_k la valeur prise par f sur $]a_k, a_{k+1}[$.

On définit :

$$\mathrm{I}_s(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\lambda_k.$$

Alors, $\mathrm{I}_s(f)$ est indépendant du choix de la subdivision s adaptée à f.

On appelle *intégrale de f sur* $[a\,;b]$, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre $\mathrm{I}_s(f)$:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\lambda_k.$$

Exemple 2 : Si la fonction f est constante et prend la valeur λ sur $[a\,;b]$, son intégrale est $\displaystyle\int_{[a;b]} f = (b-a)\lambda$.
C'est l'aire algébrique du rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ.

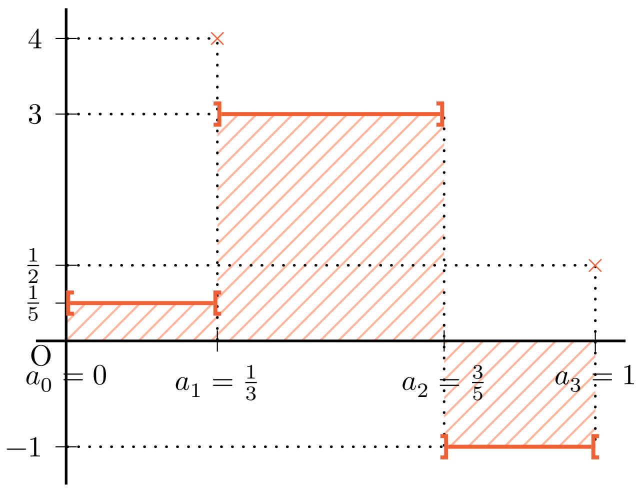


Figure XXVI.4 – Exemple d'intégrale d'une fonction en escalier avec la fonction de la figure XXVI.2.

Remarques :

— La valeur de f en chaque a_k n'intervient pas.

— Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $(a_{k+1}-a_k)\lambda_k$ est l'aire « algébrique » du rectangle de base $a_{k+1}-a_k>0$ et de hauteur λ_k.

Cette aire est négative ou positive suivant le signe de λ_k.

— L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est la somme des aires algébriques des rectangles formés par la fonction en escalier avec l'axe des abscisses.

On retrouve le fait que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ corresponde à l'aire algébrique du domaine compris entre $(\mathrm{O}x)$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation : $x=a$ et $x=b$.

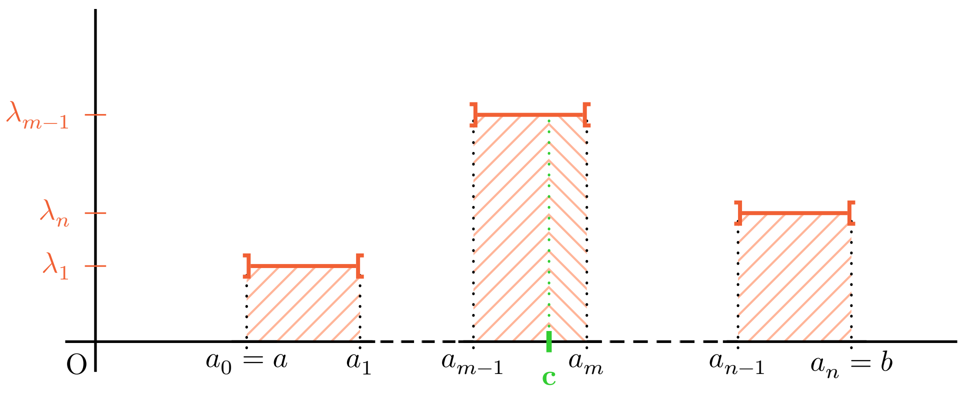


Figure XXVI.5 – L'intégrale de f est inchangée sur une subdivision plus fine.

Preuve : Cette définition est consistante car le réel $(a_k-a_{k-1})\lambda_k$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

En effet :

1. L'intégrale est invariante si on ajoute un nombre fini de points à $s=(a_0,\dots,a_n)$. Il suffit de le montrer pour l'ajout d'un point.

   Si $s'=(a_0,\dots,a_{m-1},c,a_m,\dots,a_n)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}'_s(f) &= (a_1-a_0)\lambda_0+\dots+(c-a_{m-1})\lambda_{m-1}+(a_m-c)\lambda_{m-1}+\dots+(a_n-a_{n-1})\lambda_n\\ &= (a_1-a_0)\lambda_0+\dots+(a_m-a_{m-1})\lambda_{m-1}+\dots+(a_n-a_{n-1})\lambda_n\\ &= \mathrm{I}_s(f).\end{aligned}$$

   L'intégrale de f est donc inchangée sur toute subdivision plus fine.

2. L'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.

   Soient s et s' deux subdivisions de $[a\,;b]$ adaptées à f. La subdivision $s\vee s'$ est plus fine que s et s'.

   D'après ce qui précède, $\mathrm{I}_s(f)=\mathrm{I}'_s(f)=\mathrm{I}_{s\vee s'}(f)$

   L'intégrale $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est donc indépendante de la subdivision choisie.

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{[0;n]} \lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Correction :

1. On trouve $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt = +7$. Il faut tout d'abord tracer le graphe de cette fonction. Ensuite la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ n'ont aucune influence sur l'intégrale.

   Ensuite on revient à la définition de $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$: pour la subdivision de $[0,4]$ définie par

   $$\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\},$$

   on trouve la valeur de l'intégrale (ici le sup et l'inf sont atteints et égaux pour cette subdivision et toute subdivision plus fine).

   Une autre façon de faire est considérer que f est une fonction en escalier (en « oubliant » les accidents en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$) dont on sait calculer l'intégrale.

2. C'est la même chose pour $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, mais au lieu d'aller jusqu'à 4 on s'arrête à x, on trouve

   $$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4x - 9 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

3. Les seuls points à discuter pour la continuité sont les points $x = 1$ et $x = 2$, mais les limites à droite et à gauche de F sont égales en ces points donc F est continue.

   Par contre F n'est pas dérivable en $x = 1$ (les dérivées à droite et à gauche sont distinctes), F n'est pas non plus dérivable en $x = 2$.

II.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 3 : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Linéarité : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Relation de Chasles : $\forall\, f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}),\ \forall\, c \in\,]a\,;b[$.

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Positivité : $\forall\, f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,,\, f(x) \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

En particulier,

Croissance : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a\,;b]$,

$$f(x) \geqslant g(x) \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est **croissante**.

Inégalité triangulaire : $\forall\, f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

$$\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est donc une forme linéaire.

Preuve :

Linéarité : *Soient* s *et* s' *des subdivisions adaptées à* f *et* g.

On pose $\sigma = s \vee s' = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

$\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ et $g_{|]a_i;a_{i+1}[}$ sont des fonctions constantes respectivement égales à α_i et β_i. D'où,

$$\begin{aligned}\int_{[a;b]} (\lambda f+g)(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(\lambda\alpha_i+\beta_i)\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linéarité de la somme}}}{=} \lambda\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\alpha_i+\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\beta_i\\ &= \lambda\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Relation de Chasles : Tout d'abord, remarquons que si $f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ alors $f_{|[a;c]}$ et $f_{|[c;b]}$ le sont aussi.

Soit s une subdivision adaptée à f. On pose $s' = s \vee \{c\} = a_0 < \ldots < a_n$ avec $p \in [\![1\,;n-1]\!]$ tel que $c = a_p$. s' est encore adaptée à f.

Alors $a_0 < \ldots < a_p$ et $a_p, \ldots < a_n$ sont respectivement des subdivisions de $[a\,;c]$ et $[c\,;b]$ adaptées à $f_{|[a;c]}$ et $f_{|[c;b]}$ et $\forall\, i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $f_{|]a_i;a_{i+1}[} \equiv \lambda_i$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{p-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i+\sum_{p}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i\\ &= \sum_{0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i\\ &= \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Positivité : Comme f est positive, $\forall\, i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$ et, aisément :

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{>0}\lambda_i \geqslant 0.$$

Il suffit alors d'appliquer ce résultat à la fonction $f-g$ est d'obtenir, par linéarité de l'intégrale :

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,, f(x) \geqslant g(x) \implies \int_{[a;b]} \underbrace{(f(t)-g(t))}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Inégalité triangulaire : Cette inégalité se déduit de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et de la linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{>0}\lambda_i\right|\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\,|\lambda_i| = \int_{[a;b]} |f(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

II.3 Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Théorème 4 ($\mathcal{E}([a\,;b]) \to \mathscr{C}^0([a\,;b])$ - Admis) :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right), \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}),\quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon. \tag{XXVI.1}$$

Les inégalités de (XXVI.1) sont des inégalités fonctionnelles qui se lisent :

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,,\ \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon.$$

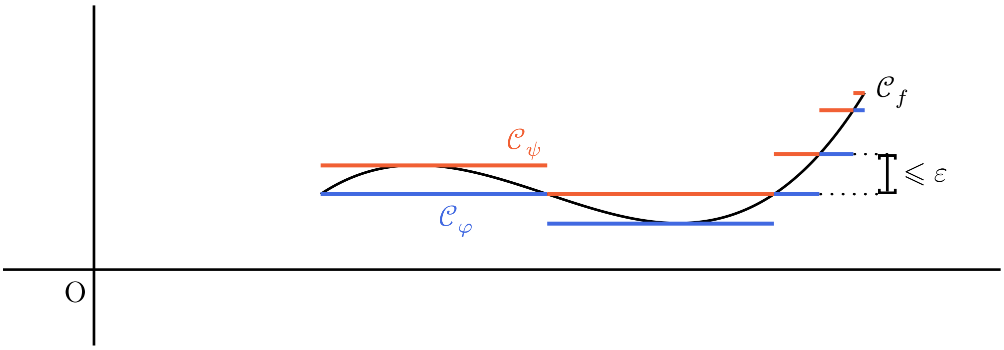


Figure XXVI.6 – Approximation d'une fonction continue par deux fonctions en escalier.

La démonstration de ce théorème est malheureusement admise car il nous manque une connaissance plus fine de la continuité sur un segment mais nous retiendrons qu'en substance il exprime que sur tout segment $[a\,;b]$, on peut approcher une fonction continue aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier. On dit que l'ensemble des fonctions en escalier sur un segment est dense dans celui des fonctions continues sur ce même segment.

III Intégrale d'une fonction continue sur un segment

III.1 Construction

Soit $f :\ [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Notons :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad \Big(0 \leqslant y \leqslant f(x) \text{ ou } f(x) \leqslant y \leqslant 0\Big) \right\}.$$

Si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ alors les nombres $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \psi$ donnent intuitivement des approximations par défaut et excès de l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$.

Pour définir l'aire de $\mathcal{D}$, on est ainsi conduit à introduire les ensembles suivants :

$$\mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) = \Big\{ \psi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, f \leqslant \psi \Big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) = \Big\{ \varphi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, \varphi \leqslant f \Big\}.$$

Ensembles des fonctions en escaliers sur $[a\,;b]$ qui majorent et minorent f sur $[a\,;b]$.

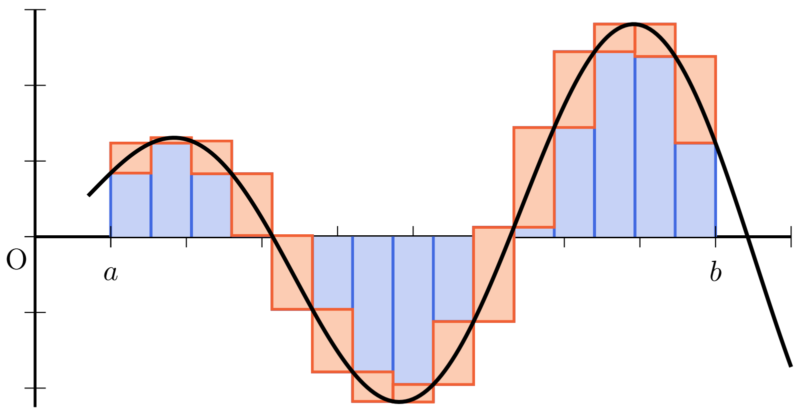


Figure XXVI.7 – Encadrement $\displaystyle\int_{[a\,;b]} \varphi \leqslant \int_{[a\,;b]} f \leqslant \int_{[a\,;b]} \psi$.

Théorème 5 : Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :

- $\mathrm{I}^{-}_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure $\mathscr{I}$.
- $\mathrm{I}^{+}_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^{+}_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne inférieure $\mathcal{J}$.

De plus, $\mathscr{I} = \mathcal{J}$.

Preuve : La fonction f étant continue sur le segment $[a\,;b]$, elle est bornée sur $[a\,;b]$.
Posons $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ et $\mathrm{M} = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.

- $\mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante égale à m. Donc, $\mathrm{I}^{-}_{[a;b]}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

  De plus, par construction pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f)$, on a $\varphi \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$.

  D'où, $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \mathrm{M}(b-a)$ et l'ensemble $\mathrm{I}^{-}_{[a;b]}$ est majoré.

  Partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, $\mathrm{I}^{-}_{[a;b]}$ possède une borne supérieure que l'on note $\mathscr{I}$.
- De la même manière, $\mathrm{I}^{+}_{[a;b]}$ est une partie non vide (contient la fonction constante M) et minorée (par $m(b-a)$) donc admet une borne inférieure que l'on note $\mathcal{J}$.
- Par construction, pour tout $(\varphi\,;\psi) \in \mathcal{E}^{-}_{[a;b]}(f) \times \mathcal{E}^{+}_{[a;b]}(f)$, on a $\varphi \leqslant \psi$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} \psi$.

  Le nombre $\displaystyle\int_{[a;b]} \psi$ est donc un majorant de $\mathrm{I}^{-}_{[a;b]}$. Il est donc supérieur au plus petit d'entre eux $\mathscr{I}$ i.e.

$$\forall\, \psi \in \mathcal{E}^{+}_{[a;b]}(f),\ \mathscr{I} \leqslant \int_{[a;b]} \psi.$$

  Le réel $\mathscr{I}$ est donc un minorant de $\mathrm{I}^{+}_{[a;b]}$ donc certainement plus petit que le plus grand d'entre eux $\mathcal{J}$ i.e.

$$\mathscr{I} \leqslant \mathcal{J}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème (XXVI.1), il existe $(\varphi\,;\psi) \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \times \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)$ telles que $(0 \leqslant)\, \psi - \varphi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ce qui implique notamment

$$\int_{[a;b]} \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

Or, par définition de $\mathcal{I}$ et $\mathscr{I}$, on a :

$$\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \mathscr{I} \leqslant \mathcal{I} \leqslant \int_{[a;b]} \psi \implies 0 \leqslant \mathcal{I} - \mathscr{I} \leqslant \int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \varphi = \int_{[a;b]} \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

Encadrement vrai pour tout ε strictement positif aussi petit que l'on veut i.e. $\mathscr{I} = \mathcal{I}$.

Définition 5 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre réel défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)\right\}.$$

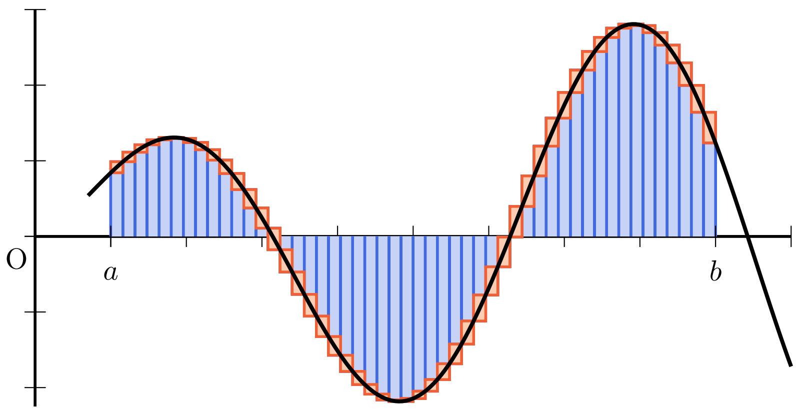


Figure XXVI.8 – Pour f continue sur $[a\,;b]$, $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)\right\}$.

Interprétation géométrique : $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$ du plan situé entre le graphe de f, l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe $(\mathrm{O}x)$, négativement en dessous) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

— Les fonctions pour lesquelles $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]} = \inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ sont dites *intégrables au sens de Riemann* [2] *sur* $[a\,;b]$ ou Riemann-intégrables.

— Pour toute fonction continue f sur $[a\,;b]$ et toute subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a\,;b]$, on peut poser :

$$\mathrm{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x).$$

On appelle alors *sommes de Darboux* inférieure $\mathrm{L}_{f,\sigma}$ et supérieure $\mathrm{U}_{f,\sigma}$ de f selon σ, les réels :

$$\mathrm{L}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mathrm{M}_i.$$

Par construction, $\mathrm{L}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^-_{f,[a;b]}$ et $\mathrm{U}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^+_{f,[a;b]}$.

— Ce théorème prouve que les que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann.

— Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann non continues, par exemple les fonctions en escalier.

— Il existe des fonctions non intégrables au sens de Riemann. Par exemple, l'indicatrice de $\mathbb{Q}$,

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

est non intégrable car ses sommes de Darboux inférieures et supérieures seraient nécessairement respectivement égales à 0 et 1.

— Si f est une fonction en escalier, $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ se trouve à la fois dans $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et dans $\mathrm{I}^+_{[a;b]}$.

Donc la valeur commune de $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et $\inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ n'est autre que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

Les deux définitions de l'intégrale (pour une fonction en escalier, et pour une fonction continue) sont cohérentes.

⌊2⌋. **Georg Friedrich Bernhard Riemann**, né le 17 septembre **1826** à Breselenz, Royaume de Hanovre, mort le 20 juillet **1866** à Selasca. Fils de pasteur, voué de par la volonté paternelle à des études théologiques, le jeune Bernhard entre à l'université de Göttingen (1846) afin étudier la philosophie malgré son attrait et ses brillantes capacités pour les mathématiques. Sa rencontre avec Gauss, mathématicien et astronome réputé, sera déterminante : il sera mathématicien.

Gauss, alors âgé de 74 ans, dirigea sa thèse (1851) sur les fonctions d'une variable complexe en la célèbre université de Göttingen. Riemann fut lui-même professeur à Göttingen, succédant à ce dernier en 1859 (Dirichlet avait lui-même succédé à Gauss quatre ans plus tôt). Hélas, cet illustre mathématicien mourut prématurément à peine âgé de 40 ans, atteint de tuberculose à Selesca (lac Majeur, Italie) où il se soignait.

C'est dans sa thèse de 1851 (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Größe = Fondements pour une théorie générale des fonctions d'une variable complexe), qu'apparaît la notion de surface de Riemann permettant de donner un sens à une fonction complexe susceptible de prendre plusieurs valeurs : les fonctions multiformes. Une vision totalement nouvelle, voire révolutionnaire, d'une théorie précédemment élaborée par Cauchy qui y consacra 30 ans de sa vie.

Avec sa théorie des surfaces (Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, 1854), généralisée abstraitement à n dimensions : les Variétés (Mannigfaltigkeit), on pénètre dans des géométries non euclidiennes avec la généralisation de la notion de distance, qui seront, 50 ans plus tard, pour Einstein et Minkowski les outils indispensables pour la mise en place de la théorie de la relativité.

Dans ces nouveaux espaces, avec la recherche de propriétés invariantes par « transitions » continues, Riemann apparaît comme un des pères de la topologie moderne, branche extrêmement féconde et toujours actuelle des mathématiques entrevue par Euler et Leibniz et que ce dernier nomma Analysis situs, terme utilisé jusqu'au 20ème siècle, avec Poincaré, par exemple.

En analyse, Riemann développa la théorie des fonctions abéliennes et des fonctions elliptiques et compléta les travaux de Dirichlet, son maître, sur les séries trigonométriques et leurs problèmes de convergence. Dans ce dernier contexte, son nom reste attaché à sa célèbre formalisation de l'intégrale

Non satisfait de la théorie de l'intégration de Cauchy portant sur les fonctions continues qui lui paraît insuffisante pour manipuler certaines séries de Fourier (de fonctions « peu » régulières), Riemann publie (1854) une rigoureuse théorie de l'intégration pour les fonctions bornées sur un intervalle fermé.

On sait depuis Mercator et Leibniz, que si une fonction est positive, l'intégrale sur un intervalle $[a, b]$, $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ (notation due à Fourier), évalue l'aire du domaine « sous la courbe », parfois appelée hypographe. L'intégrale est obtenue en encadrant la fonction f entre deux suites de fonctions en escalier : on parle de quadrature, calcul d'aire basé sur la décomposition en rectangles (ou carrés au sens étymologique) de la surface à évaluer.

Méthode 1 (Montrer qu'une fonction est Riemann-Intégrable) : Pour justifier l'existence d'une intégrale, il suffit donc de dire c'est celle d'une fonction en escalier, ou d'une fonction continue sur un segment, ou se prolonge par continuité sur un segment.

Exemple 4 : L'écriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ a un sens mais $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ n'en a pas (cette année...).

III.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

Notre intégrale construite, suivons le même chemin que pour celle des fonctions en escaliers et intéressons-nous à ses propriétés. L'essentiel va être de transmettre celles de l'intégrale des fonctions en escalier à celle des fonctions continues. C'est une manière typique des raisonnements dits par densité.

Proposition 6 (Linéarité) : Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$\int_{[a;b]} \alpha f + g = \alpha \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$$

Preuve : Montrons séparément que $\displaystyle\int_{[a;b]} f + g = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \alpha f = \alpha \int_{[a;b]} f$.

1 Soient f, g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème d'approximation, il existe quatre fonctions :

$\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}([a\,;b])$ telles que :

$$\begin{cases} \phi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1 \\ \psi_1 - \phi_1 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2 \\ \psi_2 - \phi_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{cases} \tag{XXVI.2}$$

Alors, en additionnant, on obtient $\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 \leqslant f + g \leqslant \psi_1 + \psi_2 \\ (\psi_1 + \psi_2) - (\phi_1 + \phi_2) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a} \end{cases}$.

Posons $\phi = \phi_1 + \phi_2$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$ qui sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ et vérifiant :

$$\phi \leqslant \quad f + g \quad \leqslant \psi \tag{XXVI.3}$$

$$\psi - \phi \quad \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{XXVI.4}$$

– Les fonctions $\psi - \phi$ et ε sont en escalier et, par croissance de l'intégrale (des fonctions en escalier), les inégalités (XXVI.4) donnent :

$$\int_{[a;b]} (\psi - \phi) \leqslant \int_{[a;b]} \frac{\varepsilon}{b-a},$$

puis, par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi \leqslant \varepsilon. \tag{XXVI.5}$$

– Par ailleurs, (XXVI.3) entraine

$$\int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} (f+g) \leqslant \int_{[a;b]} \psi. \tag{XXVI.6}$$

De même, les encadrements de (XXVI.2) fournissent

$$\int_{[a;b]} \phi_1 \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi_1 \quad \text{et} \quad \int_{[a;b]} \phi_2 \leqslant \int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} \psi_2.$$

Puis, en sommant membre à membre,

$$\int_{[a;b]} \phi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de} \\ \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \int_{[a;b]} \phi_1 + \int_{[a;b]} \phi_2 \leqslant \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} \psi_1 + \int_{[a;b]} \psi_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de} \\ \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \int_{[a;b]} \psi.$$

Retournant ces inégalités, on a :

$$-\int_{[a;b]} \psi \leqslant -\left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g\right) \leqslant -\int_{[a;b]} \phi,$$

Inégalités qui, ajoutées à celles de (XXVI.6) s'écrivent :

$$-\left(\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi\right) \leqslant \int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g\right) \leqslant \int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi.$$

Un soupçon de (XXVI.5) pour aboutir à

$$-\varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g\right) \leqslant \varepsilon.$$

$$0 \leqslant \left|\int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

La quantité (fixe) $\left|\int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g\right)\right|$ étant comprise entre 0 et ε quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit qu'elle est nulle.

En conclusion, $\int_{[a;b]} (f+g) = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$.

$\boxed{2}$ Le raisonnement est quasiment identique.

Soient f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le résultat étant évident sinon, on peut supposer $\alpha \neq 0$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème d'approximation, il existe $\phi, \psi \in \mathcal{E}([a\,;b])$ telles que

$$\begin{cases} \phi \leqslant f \leqslant \psi \\ \psi - \phi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\alpha(b-a)} \end{cases}$$

– Si $\alpha \geqslant 0$, on a $\alpha\phi \leqslant \alpha f \leqslant \alpha\psi$, et donc par définition de $\displaystyle\int_{[a;b]} \alpha f$:

$$\alpha \int_{[a;b]} \phi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de } \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \int_{[a;b]} \alpha\phi \leqslant \int_{[a;b]} (\alpha f) \leqslant \int_{[a;b]} \alpha\psi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de } \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \alpha \int_{[a;b]} \psi.$$

Par ailleurs, par définition de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ on a aussi :

$$\int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi \implies \alpha \int_{[a;b]} \phi \leqslant \alpha \int_{[a;b]} f \leqslant \alpha \int_{[a;b]} \psi.$$

On en déduit :

$$-\alpha \left(\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi \right) \leqslant \int_{[a;b]} (\alpha f) - \alpha \int_{[a;b]} f \leqslant \alpha \left(\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi \right).$$

Mais, on a encore $\displaystyle\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi = \int_{[a;b]} (\psi - \phi) \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}$.

D'où,

$$-\varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} (\alpha f) - \alpha \int_{[a;b]} f \leqslant \varepsilon \iff 0 \leqslant \left| \int_{[a;b]} (\alpha f) - \alpha \int_{[a;b]} f \right| \leqslant \varepsilon.$$

L'encadrement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_{[a;b]} (\alpha f) = \alpha \int_{[a;b]} f$.

– Si $\alpha < 0$, le raisonnement est identique en n'omettant pas d'inverser les inégalités en multipliant par α.

Dans tous les cas,

$$\int_{[a;b]} (\alpha f) = \alpha \int_{[a;b]} f.$$

Remarque : L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f \end{array}$ est désormais aussi une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

Proposition 7 (Relation de Chasles) : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $c \in [a\,;b]$.
Alors :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Preuve : Soient $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$ et $\phi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)$. Il est clair qu'il en est de même pour ses restrictions $\phi_{|[a;c]} \in \mathcal{E}^-_{[a;c]}\left(f_{|[a;c]}\right)$ et $\phi_{|[c;b]} \in \mathcal{E}^-_{[c;b]}\left(f_{|[c;b]}\right)$.
Par linéarité de l'intégrale sur les fonctions en escaliers et par définition de l'intégrale sur les fonctions continues, on a :

$$\int_{[a;b]} \phi = \int_{[a;c]} \phi + \int_{[c;b]} \phi \leqslant \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Le réel $\displaystyle\int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$ est donc un majorant de $\mathrm{I}^-_{f,[a;b]}$ donc plus grand que le plus petit d'entre eux i.e.

$$\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Par linéarité, on peut maintenant appliquer ce résultat à $-f$ qui donne les inégalités inverses et l'égalité.

Donc $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$

Remarque : On peut, bien sûr, réitérer le même raisonnement en considérant et $\psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)$ et montrer que $\displaystyle\int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$ est un minorant de $\mathrm{I}^+_{f,[a;b]}$ puis $\displaystyle\int_{[a;b]} f \geqslant \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$

On conclut alors encore à l'égalité.

Notations : Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$).

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. On définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f$ si $a < b$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[b;a]} f$ si $a > b$.

La relation de Chasles et la linéarité sont alors vraies pour a, b et c quelconques.

Corollaire 7.1 : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$.

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Preuve : Sans perte de généralités, supposons $a < b$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f - \int_{[a;b]} f = 0 \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En posant $a = b$, le seul nombre égal à son opposé est toujours 0 et $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Proposition 8 (Relation d'ordre) :

Positivité de l'intégrale : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0. \qquad \text{(XXVI.7)}$$

Croissance de l'intégrale : Soient $f,\ g \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g.$$

Inégalité triangulaire : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|\,.$$

Preuve :

1. La fonction nulle sur $[a\,;b]$ est en escalier et elle est, par hypothèse, inférieure à f. Par définition de $\int_{[a;b]} f$, on a donc $\int_{[a;b]} 0 \leqslant \int_{[a;b]} f$, i.e. $0 \leqslant \int_{[a;b]} f$.
2. Si $f \leqslant g$ alors $g - f \geqslant 0$ et on applique le résultat précédent : $\int_{[a;b]} (g-f) \geqslant 0$.

   Par linéarité, $\int_{[a;b]} g - \int_{[a;b]} f \geqslant 0$ et finalement, $\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$.
3. Il suffit de remarquer que $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ et appliquer les résultats précédents. Par croissance, on a :

$$\int_{[a;b]} (-|f|) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} |f| \underset{\text{Linéarité de } \int}{\implies} -\int_{[a;b]} |f| \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} |f|,$$

Finalement, $\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$.

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On considère $\mathrm{P}(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le signe de $\mathrm{P}(\lambda)$.
2. En déduire que $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\displaystyle\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Peut-on offrir une réciproque à l'implication (XXVI.7) ? La réponse est oui mais à une condition.

Théorème 9 : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}_+)$ une fonction continue à valeurs **positives**.

$$\int_{[a;b]} f = 0 \iff f = 0_{\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R}_+)}.$$

Preuve : Le sens réciproque est l'expression de (XXVI.7).

Par contraposition, supposons que f ne soit pas identiquement nulle sur $[a\,;b]$ i.e. qu'il existe $x_0 \in [a\,;b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On a donc $f(x_0) > 0$.

Supposons que $x_0 \in]a,b[$.

Comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, x \in [a\,;b]$,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{f(x_0)}{2} \implies f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

Posons $\phi : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0)}{2} \text{ si } x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

On a $\phi \in \mathcal{E}_{[a;b]}$ et $\phi \leqslant f$.

Par définition de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, on a :

$$\int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} f \iff 0 < \frac{f(x_0)}{2} 2\eta \leqslant \int_{[a;b]} f.$$

L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ ne peut donc pas être nulle.

Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, on fait le même raisonnement en travaillant d'un seul côté sur des intervalles de la forme $[a, x_0 + \eta[$ ou $]x_0 - \eta, b]$.

ATTENTION

Faux pour les fonctions *non positives* comme sin sur $[0, 2\pi]$ ou *non continues* comme

$$\delta_0 : \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (Prélude à l'année prochaine) : Montrer que l'application $\cdot \mid \cdot$ définie par :

$$\cdot \mid \cdot : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f\,;g) & \longmapsto & f \mid g = \displaystyle\int_{[a;b]} fg \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

III.3 Inégalité de la moyenne

Proposition 10 : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$m \leqslant f \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \mathrm{M}(b-a). \qquad \text{(XXVI.8)}$$

Preuve : Il suffit de prendre l'intégrale dans les inégalités $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$.

D'un point de vue graphique, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur.

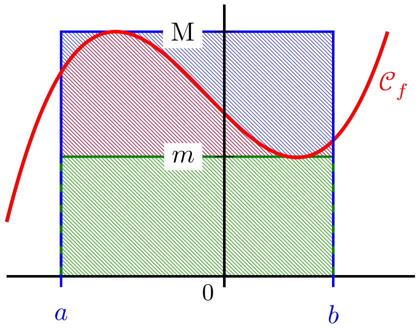


Figure XXVI.9 – Inégalité de la moyenne.

La philosophie de cette implication est que l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ ne peut faire n'importe quoi comme devenir infinie par exemple. Elle est bornée par le produit des extrema de la fonction par la longueur de l'intervalle. Ce résultat est important mais on a mieux.

Remarque : L'inégalité des accroissements finis nous donnait un résultat similaire pour une fonction dérivable sous la forme :

$$m \leqslant f' \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

En permettant d'écrire $\displaystyle\int_{[a;b]} f' = f(b) - f(a)$, le *Théorème Fondamental de l'analyse* fera bientôt le lien entre ces deux résultats.

Pourquoi se contenter d'une faible inégalité alors qu'on pourrait avoir une égalité ?

Théorème II (Valeur moyenne d'une fonction) : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$.
Alors il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c). \tag{XXVI.9}$$

Le nombre $\mu = f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors appelé la *valeur moyenne* de f sur $[a\,;b]$.

Preuve : La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ elle y est bornée par deux réels $m = \min\limits_{[a;b]} f$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{[a;b]} f$ et on a :

$$\forall\, x \in a\,;b, \quad m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

D'après la relation (XXVI.8), on a alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{M}(b-a) \iff m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{M}.$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient donc à l'intervalle $f([a\,;b]) = [m\,;\mathrm{M}]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f continue sur $[a\,;b]$, il existe donc un [3] réel $c \in [a\,;b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

Remarques :

— Pourquoi ce nom du théorème ? Comment calculerions-nous la valeur moyenne, notée par exemple $\overline{f}$, d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$?

Tout simplement, en sommant toutes les valeurs de f prises sur l'intervalle $[a\,;b]$ divisées par toutes les valeurs de ce même intervalle. Ce qui s'écrirait :

$$\overline{f} = \frac{\text{Somme de toutes les valeurs de } f(x) \text{ sur l'intervalle } [a\,;b]}{\text{Toutes les valeurs de l'intervalle } [a\,;b]} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

— La valeur moyenne est la constante qui vérifie $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mu$. C'est la valeur que devrait prendre f si elle était constante, pour que l'intégrale soit inchangée :

$$\underbrace{\mu(b-a)}_{\text{aire du rectangle}} = \underbrace{\int_{[a;b]} f}_{\text{aire sous la courbe}}.$$

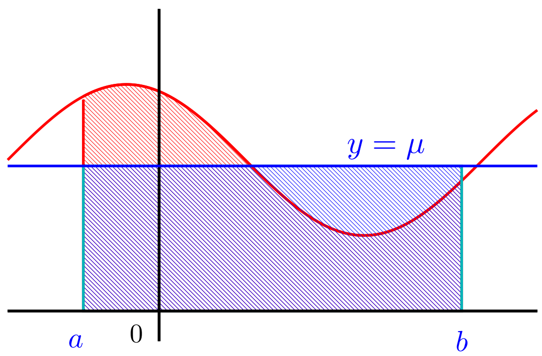


Figure XXVI.10 – Le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle bleu dont les côtés ont pour mesures $b - a$ et μ.

— D'un point du vue cinématique la valeur moyenne de la vitesse d'un mobile [4] mesurée entre deux temps t_1 et t_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{t_2-t_1}\Big[x(t)\Big]_{t_1}^{t_2} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}\\ &= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \text{vitesse moyenne.}\end{aligned}$$

[3]. La valeur moyenne de f est comprise entre son minorant et son majorant.
[4]. La vitesse instantanée est la dérivée de la position $x(t)$.

La valeur moyenne de la vitesse d'un mobile est donc sa vitesse moyenne [5]

Commentaires : Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a\,;b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la sommes des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles.

La construction de l'intégrale que nous avons donnée fonctionne d'ailleurs pour une classe de fonctions plus large que les fonctions continues, qu'on appelle fonctions *réglées* (mais que nous n'étudierons pas cette année).

Il existe d'autres façons de définir rigoureusement l'intégrale, celle que nous avons étudiée est l'intégrale de Riemann, et il existe notamment une intégrale de Lebesgue qui permet de définir l'intégrale sur une classe de fonctions encore nettement plus large, appelées fonctions *mesurables*.

Bref, même si ça ne vous saute pas aux yeux, nous avons fait au plus simple !

IV Intégration et Dérivation

IV.1 Théorème Fondamental de l'analyse

Théorème 12 (Théorème Fondamental de l'analyse) : Soit f une fonction continue sur un *intervalle* I, et $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Ce théorème est un théorème d'EXISTENCE de primitives pour les fonctions CONTINUES.

En outre, la fonction f étant continue, sa primitive $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est mieux que dérivable, c'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Fondamental, ce théorème l'est parce qu'il établit un lien entre deux couples de notions apparemment totalement étrangères - le couple aire/intégrale et le couple primitive/dérivée que nous préciserons avec le théorème (13).

Preuve : Supposons que $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$. Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in \mathrm{I}$.

$\mathrm{F}(x_0+h) - \mathrm{F}(x_0) = \displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - hf(x_0)\right| \\ &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

[5]. Heureusement !

f étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in \mathrm{I}, \quad |t - x_0| \leqslant \eta \implies |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

Si $0 < h < \eta$ on a donc $\left|\dfrac{\mathrm{F}(x_0+h) - \mathrm{F}(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon$.

D'où $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\mathrm{F}(x_0+h) - \mathrm{F}(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Idem si $h < 0$.

On en déduit que F est dérivable en x_0 et que $\mathrm{F}'(x_0) = f(x_0)$.

Si x_0 est une extrémité de I, le raisonnement est identique mais on n'a à travailler que d'un côté.

En conclusion, F est une primitive de f qui vérifie $\mathrm{F}(a) = \displaystyle\int_a^a f = 0$.

Supposons alors que G soit une autre primitive de f s'annulant en a.

Dans ce cas $(\mathrm{F} - \mathrm{G})' = f - f = 0$. La fonction $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ dont la dérivée est nulle sur l'intervalle I est donc constante à $\mathrm{F}(a) - \mathrm{G}(a) = 0$ sur I.

Les deux primitives F et G sont donc égales.

Corollaire 12.1 : Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

— La primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$ par définition.

— Le théorème ne s'applique pas aux fonctions discontinues. Par exemple, la fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $[0, 2]$.

ATTENTION Cela ne contredit en rien le fait que la fonction partie entière soit intégrable. Le théorème fondamental donne juste une condition suffisante d'existence d'une primitive. Cette condition n'est même pas nécessaire vue la remarque suivante.

— Il existe toutefois des fonctions non continues ayant des primitives.

Exemple 5 : La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

dont la dérivée $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ n'est pas continue (en 0).

La fonction g admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ sans y être continue.

IV.2 Calcul d'intégrales

Théorème 13 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in \mathrm{I}$.
Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Preuve : D'après le théorème (12), $\mathrm{F}_0 : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I s'annulant en a.

Comme F est une autre primitive de f sur l'intervalle I, il existe une constante k telle que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + k$.

On a donc $\mathrm{F}(a) = \cancel{\mathrm{F}_0(a)} + k \iff k = \mathrm{F}(a)$.

Finalement, $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \mathrm{F}(a)$, i.e. $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}_0(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) \iff \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$.

En particulier, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Notation : On note $= \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b$ la quantité $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Ainsi,

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).}$$

Exemple 6 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

Corollaire 13.1 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Exercice 4 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

Correction :

1. Commençons plus simplement avec la fonction

$$\mathrm{H}(x) = \int_a^{v(x)} f(t)dt.$$

En fait H est la composition de la fonction $x \mapsto v(x)$ avec la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$:

$$H = G \circ v.$$

La fonction v est dérivable et la fonction G aussi (c'est une primitive) donc la composée $H = G \circ v$ est dérivable, de plus $H'(x) = v'(x) \cdot G'(v(x))$.

En pratique comme $G'(x) = f(x)$ cela donne $H'(x) = v'(x)f(v(x))$.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de connaître cette formule mais il est important de savoir refaire ce petit raisonnement.

On montrerait de même que la fonction $x \to \int_{u(x)}^a f(t)dt$ est dérivable de dérivée $-u'(x)f(u(x))$.

Revenons à notre fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(x)}^a f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt$, c'est la somme de deux fonctions dérivables donc est dérivable de dérivée :

$$F'(x) = v(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

2 On applique ceci à $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$ nous obtenons :

$$G'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2+(2x)^4} - \frac{1}{1+x^2+x^4}.$$

IV.3 Intégration par parties

Théorème 14 : Soient u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Soient $a, b, \in$ I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$, elles sont dérivables.

Le produit uv est donc dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

De plus, u, v étant de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions u', v', sont continues sur I. Les fonctions $u'v$, uv' et donc $(uv)'$ sont alors continues sur I. Les intégrales sont donc bien définies.

On a $\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + uv')$.

Or, $\int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$ et $\int_a^b (u'v+uv') = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$.

Donc, $\Big[uv\Big]_a^b = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$ et $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 7 : $\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\arctan(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 5 : Soient $x > 1$ et $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x \ln^n(t)\,dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.
2. En déduire la valeur de $F_n(x)$.

Correction : Soit $x > 1$.

1. Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \ln^{n+1}(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$, une intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_1^x \ln^{n+1}(t)\,dt = \Big[t\ln^{n+1} t\Big]_1^x - (n+1)\int_0^x \ln^n(t)\,dt \\ &= x\ln^{n+1} x - (n+1)F_n(x). \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= x\ln^n(x) - nF_{n-1}(x) \\ &= x\ln^n(x) - nx\ln^{n-1}(x) + n(n-1)F_{n-2} \\ &= x\ln^n(x) - nx\ln^{n-1}(x) + n(n-1)x\ln^{n-2}(x) - n(n-1)(n-2)F_{n-3} \\ &= \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x\ln^{n-k}(x) + (-1)^n n!F_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}x\ln^{n-k}(x). \end{aligned}$$

IV.4 Changement de variables

Théorème 15 : Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Alors :

$$\int_a^b \phi'(t)f(\phi(t))\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

Preuve : La fonction f étant continue sur J, elle admet une primitive F, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \to & \phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \phi(t) & \mapsto & F(\phi(t)) \end{array}$$

La fonction $F \circ \phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$, comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Et, $\forall\, t \in \mathrm{I}$, $\quad (F\circ\phi)'(t) = \phi'(t) \times (F'\circ\phi)(t) = \phi'(t) \times f(\phi(t))$.

Cette dernière fonction étant continue sur I, on peut intégrer sur $[a\,;b]$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi'(t)\times f(\phi(t))\,\mathrm{d}t &= \Big[(\mathrm{F}\circ\phi)'(t)\Big]_a^b \\ &= \mathrm{F}(\phi(b)) - \mathrm{F}(\phi(a)) \\ &= \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_{\phi(a)}^{\phi(b)} \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Méthode 2 (Changement de variables dans la pratique) :

1. On dit qu'on pose $x=\phi(t)$, et on vérifie que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
2. On a $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On n'oublie pas de changer les bornes : lorsque t varie de a à b, x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

$$\int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{f(x)}\,\underbrace{\phi'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 8 : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$. Soit $f : x\longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

La fonction f est une fraction rationnelle ne possédant pas de pôles réels donc bien définie et au moins continue sur $[0\,;1]$.

Une mise sous forme canonique du dénominateur $1+x+x^2 = \dfrac{3}{4}+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ encourage à effectuer le changement de variables

$$t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \iff x=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}.$$

1. Posons $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{1}{2}$.

   Lorsque $x\in[0\,;1]$, $t\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.

   Le changement de variable $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{1}{2}$ est fonction affine de t donc clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.
2. $\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$.

3 D'où,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}$$
$$= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

À l'aide de la formule de changement de variable, on peut prouver de façon rigoureuse les résultats suivants, qui sont géométriquement évidents.

Corollaire 15.1 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) : Soient $a>0$ et f une fonction continue sur l'intervalle considéré.

1. Si $f:[-a\,;a]\longmapsto\mathbb{R}$ est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $f:[-a\,;a]\longmapsto\mathbb{R}$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Si $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ et T-périodique $(\mathrm{T}>0)$ alors pour tous réels a,b on a :

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve :

1. En effectuant le changement de variable $t=-x$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En effectuant le changement de variable $t=-x$, on constate que cette intégrale est égale à son opposé.
3. De même, pour une fonction continue et T-périodique, un changement de variable $x=t+\mathrm{T}$ permet de montrer que $\displaystyle\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Pour la deuxième formule, utilisons d'abord la relation de Chasles pour obtenir :

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t}_{u=t-\mathrm{T}}$$
$$= -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(u+\mathrm{T})\,\mathrm{d}u$$
$$= \cancel{-\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t} + \int_0^{\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x + \cancel{\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u} = \int_0^{\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Correction :

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x$ alors F est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Faux. Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x^2$ alors F est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$.
5. Vrai.
6. Faux. Faire le calcul avec la fonction $f(x) = 1 + \sin(x)$ par exemple.
7. Vrai.

V Formules de Taylor

V.1 Théorème de Taylor-Lagrange

Théorème 16 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque : Pour $n = 0$, on retrouve le *théorèmes des accroissements finis.*

Preuve : Considérons une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et posons :

$$\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{A},$$

où A est tel que $\varphi(a) = 0$ i.e.

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{A} = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

La fonction φ est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or, $\forall x \in]a\,;b[$, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\mathrm{A}\\ &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\mathrm{A}\\ &= -\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\mathrm{A}\\ &= \frac{(b-x)^n}{n!}(\mathrm{A} - f^{(n+1)}(x)).\end{aligned}$$

Comme $c \neq b$, la condition $\varphi'(c) = 0$ entraîne $\mathrm{A} = f^{(n+1)}(c)$.

On obtient l'égalité demandée, en traduisant $\varphi(a) = 0$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Corollaire 16.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a la majoration :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1}\frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad \text{avec } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Ce résultat est moins fin que celui du théorème (16) mais souvent suffisant et plus pratique. Pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a\,;b]$, il exprime notamment que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \mathrm{O}\left((b-a)^{n+1}\right).$$

C'est bien mais c'est moins fin que le corollaire (17.1) .

Remarque : Comme f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, sa dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ est donc continue sur l'intervalle compact $[a\,;b]$. Elle y est donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes et la définition de M_{n+1} y est donc légitime.

Exemple 9 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \longmapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \longmapsto z^n \exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left|f(1) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| = \left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|z^{n+1}\exp(zx)\right|.$$

En notant $z = a + \mathrm{i}\,b$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leqslant \exp(|a|)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

On en déduit :

$$\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|a|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où le résultat.

Exercice 7 : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $\mathrm{M} = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a,b]\}$.

Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \mathrm{M}\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Correction : Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. F est de classe C^2 sur le segment $[a,b]$ et l'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'écrire

$$\left|\mathrm{F}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \mathrm{F}(a) - \frac{b-a}{2}\mathrm{F}'(a)\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}\sup\{|\mathrm{F}''(x)|,\ x \in [a,b]\}.$$

Mais $\mathrm{F}'(a) = f(a) = 0$ et $\mathrm{F}'' = f'$. Donc,

$$\left|\mathrm{F}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \mathrm{F}(a)\right| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{4}.$$

De même, puisque $\mathrm{F}'(b) = f(b) = 0$,

$$\left|\mathrm{F}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \mathrm{F}(b)\right| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= |\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)| \leqslant \left|\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|\mathrm{F}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \mathrm{F}(a)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{4} \\ &= \mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{4}.\end{aligned}$$

V.2 Formule de Taylor avec reste intégral (Hors-Programme)

Théorème 17 (Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace) : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formule de Taylor avec reste intégral, est la seule formule de Taylor à donner une expression précise du reste. Elle est très utile lorsqu'on s'intéresse à la régularité de ce dernier comme on le verra plus loin.

Preuve : On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : f \in \mathscr{C}^{n+1}([a\,;b]\,;\mathbb{R}) \implies f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Pour $n = 0$, c'est le théorème fondamental de l'analyse. En effet, pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \iff f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^0}{0!} f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

La proposition $\mathscr{P}(0)$ est donc vérifiée.

– Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $f \in \mathscr{C}^{n+2}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.
Elle est, en particulier, de classe $\mathscr{C}^{n+1}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ et on a donc

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tout repose alors sur la formule d'intégration par parties :

Les fonctions $f^{(n+1)}$ et $x \longmapsto \dfrac{(b-x)^n}{n!}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, il est légitime d'intégrer par parties pour écrire :

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x. \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

La relation est donc héréditaire.

– Étant initialisée pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème (17) permet de redémontrer très facilement l'inégalité du corollaire (16.1) :

Preuve : Il suffit de majorer le reste de la formule de Taylor à l'aide de l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^b \underbrace{\frac{(b-x)^n}{n!}}_{\geqslant 0 \text{ sur } [a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \mathrm{M}_{n+1} \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Exemple 10 (Une application aux inégalités) : Montrons que :

$$\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au sinus (clairement de classe $\mathscr{C}^5$) à l'ordre 4 entre 0 et un x quelconque de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^5}{120}$.

Donc, $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 8 : Montrer que pour tout $\geqslant 0$, $\quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exemple 11 (Une application aux suites) : La fonction exp est clairement de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Appliquée à l'ordre n sur l'intervalle $[0\,;1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$\begin{aligned}\exp(1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{e} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

V.3 Formule de Taylor-Young

Corollaire 17.1 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ et tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

C'est grâce à cette formule qu'on avait obtenu les développements limités des fonctions exp, cos, sin et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ notamment.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, le théorème (17) à l'ordre $n-1$ s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \int_a^x \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (= \mathrm{O}\left((b-a)^n\right)).$$

En retranchant le terme en $k=n$, on obtient :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Or, petite astuce, $\displaystyle\int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^n}{n!}$,

$$= \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right)\mathrm{d}t$$

On suppose ici $x \leqslant a$ (le raisonnement serait identique avec $x \geqslant 0$) et on applique l'inégalité de la moyenne :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| \mathrm{d}t$$

Comme $f^{(n)}$ est continue au voisinage de a, $\exists\, \alpha > 0$ tel que $|t-a| < \alpha \implies \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $x \in \,]a-\alpha\,;a+\alpha[\, \cap \mathrm{I}$ et tout t de $[a\,;x]$, on aura $|t-a| < \alpha$ puis,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}t = \varepsilon\, \frac{(x-a)^n}{n!} \leqslant \varepsilon (x-a)^n.$$

D'où le résultat.

Commentaires :

— Cette démonstration utilise le théorème (17). Ipso facto, Hors-Programme.

— On pouvait aussi utiliser l'expression du théorème (16) pour obtenir le même résultat avec moins d'efforts certes mais réclamant une fonction de classe supérieure.

Le corollaire (17.1) est donc plus « fort » que ce que nous aurions obtenu ainsi.

À retenir ! :

- Contrairement au développement limité au voisinage de a où le reste n'est négligeable que localement dans le corollaire (17.1) , la majoration du corollaire (16.1) est globale : elle est valide pour tous a, x d'un intervalle où f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et donne une majoration explicite du reste.
- L'expression explicite du reste sous la forme d'une intégrale est donnée par le théorème (17).

VI Sommes de Riemann

Dans la première partie de ce chapitre ainsi que dans nos incursions précédentes dans le domaine de l'intégration, nous nous sommes uniquement intéressés au calcul exact d'intégrales, qui constituera de toute façon la totalité des questions que vous pourrez avoir sur le sujet à vos écrits de concours.

Mais si vous demandez à votre calculatrice préférée (en supposant qu'elle n'est pas trop calée en calcul formel) de vous donner la valeur d'une intégrale, elle va procéder de façon bien différente.

Les méthodes d'intégration numérique ont pour but de créer des suites $\left(\mathrm{S}_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ approchant la valeur d'une intégrale donnée, en maîtrisant l'erreur commise (si on ne connait pas l'erreur, le calcul ne sert à rien), et de préférence avec le moins de calculs possibles.

Nous allons en présenter trois, premières de toute une série de méthodes qui vous verrez assurément au cours de votre séjour en CPGE.

VI.1 Méthode des rectangles

Théorème 18 : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$).

Alors
$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ est une *somme de Riemann* associée à f sur $[a\,;b]$.

Pour être plus précis, la somme $\mathrm{S}_n(f)$ est appelée somme de Riemann à pas constant. On peut, bien évidemment, définir des sommes de Riemann de pas non constant. Dans ce cas, la valeur du pas est le plus grand écart entre deux valeurs successives de la subdivision, comme pour les fonctions en escalier.

Ce théorème, subtil mélange des sommes de Riemann et du théorème (5), est parfois appelé théorème de Riemann-Darboux.

Interprétation graphique : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\dfrac{b-a}{n}f(a_k) = (a_{k+1}-a_k)f(a_k)$ donc $\mathrm{S}_n(f) = \displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ représente la somme des aires algébriques des rectangles R_k de base $a_{k+1} - a_k$ et de hauteur $f(a_k)$ pour k variant de 0 à $n-1$.

En d'autres termes, le théorème (18) affirme donc que pour une fonction continue sur $[a\,;b]$, on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{S}_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

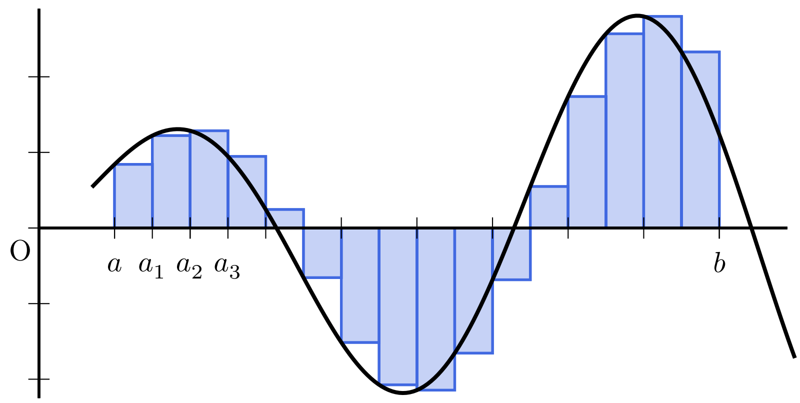


Figure XXVI.11 – Méthode des rectangles (à gauche).

Preuve : Conformément au programme, on suppose pour cette démonstration que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$. En particulier, la continuité de sa dérivée sur l'intervalle $[a\,;b]$ entraîne que f est λ-lipschitzienne en posant $\lambda = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision régulière de $[a\,;b]$ par $x_k = a + kh$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$.

On a bien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

La somme de Riemann s'écrit alors
$$\mathrm{S}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

```python
def rectangle_gauche(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    sum_rectangles = 0.0
   for i in range(n):
        x_i = a + i * h  # Bord gauche de chaque sous-intervalle
        sum_rectangles += f(x_i)
   I = h * sum_rectangles
    return I
```

Figure XXVI.12 – Méthode des rectangles à gauche

D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

D'où,

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{S}_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(hf(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| && \left(\text{Linéarité de } \sum\right) \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| && \left(h = x_{k+1} - x_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}t\right) \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big(f(x_k) - f(t)\Big)\,\mathrm{d}t\right| && \left(\text{Linéarité de } \int\right) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) - f(t)\,\mathrm{d}t\right| && (\text{Inégalité triangulaire pour les sommes}) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big|f(x_k) - f(t)\Big|\,\mathrm{d}t && (\text{Inégalité triangulaire pour les intégrales}) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \lambda\,|x_k - t|\,\mathrm{d}t && (f \text{ est } \lambda\text{-lipschitzienne}) \\
&\leqslant \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |x_k - t|\,\mathrm{d}t && \left(\text{Linéarité de } \sum \text{ et } \int\right)
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |x_k - t|\,\mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} = \frac{h^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$.

D'où, $\displaystyle\left|\mathrm{S}_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{2n^2} = \lambda\,\frac{(b-a)^2}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque : Le terme $\lambda\,\dfrac{(b-a)^2}{2n}$ est un majorant de l'erreur commise en calculant $\mathrm{S}_n(f)$ à la place de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Plus sa vitesse de convergence vers 0 sera grande, meilleure sera l'approximation.

Remarques : Dans la pratique, on se ramène toujours à l'intervalle $[0\,;1]$:

— Si f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ alors :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— De même, on peut montrer que si f est continue sur $[0\,;1]$ on a aussi :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Dans tous les cas, $S_n(f)$ représente la moyenne des n valeurs prises par f en les x_k sur l'intervalle $[a\,;b]$ ou $[0\,;1]$.

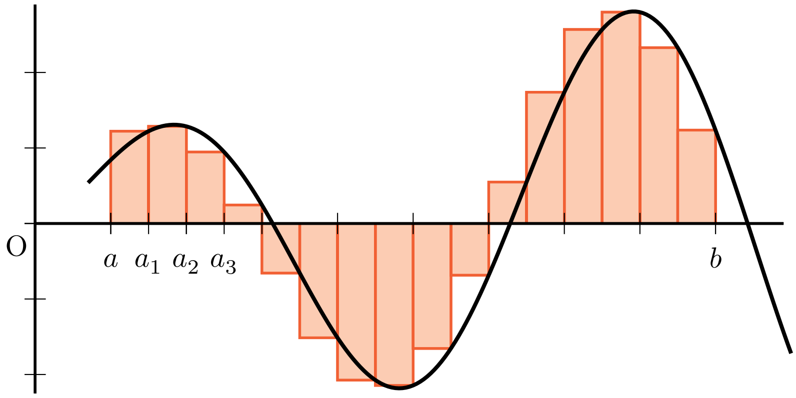


Figure XXVI.13 – Méthode des rectangles (à droite).

Exercice 9 : Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ , \ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Les fonctions sont continues donc intégrables !

1. En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est la limite (quand $n\to+\infty$) de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Notons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Alors $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

Donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

2. Même travail : $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ est la limite de

$$S'_n = \frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(1+k\frac{2-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En séparant la somme en trois nous obtenons :

$$S'_n = \frac{1}{n}\left(n + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\right) = 1 + \frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Donc $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$.

Remarque : On a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à $n-1$ est $\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

3 Même chose pour $\displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ qui est la limite de $\displaystyle S''_n = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{kx}{n}\right) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^k$.

Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique (si $x \neq 0$), donc

$$S''_n = \frac{x}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n}\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}(1-e^x)$$

qui tend vers $e^x - 1$.

Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant $u = \dfrac{x}{n}$ on a $\dfrac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}} = -\dfrac{1}{\frac{e^u-1}{u}}$ qui tend vers -1 lorsque $u \to 0$ (ce qui est équivalent à $n \to +\infty$).

On utilise parfois les sommes de Riemann de façon indirecte pour trouver la limite de suites définies par des sommes, en utilisant leur convergence vers une intégrale qu'on sait calculer (c'est donc le processus complètement inverse de celui présenté dans cette partie de cours).

VI.2 Méthode des trapèzes

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse a_k et a_{k+1}.

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}.$$

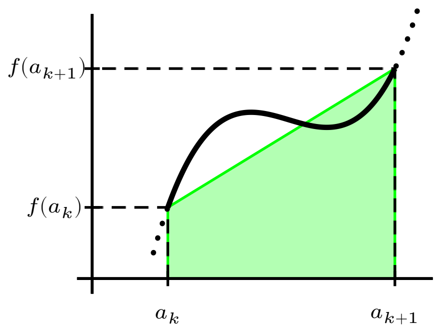


Figure XXVI.14 – Méthode des trapèzes.

La différence entre cette méthode et celle des rectangles est extrêmement minime en termes de calculs, puisqu'il suffit de calculer $n+1$ valeurs de la fonction f (au lieu de n) et calculer une somme (là encore avec une seule addition supplémentaire).

Pourtant, comme nous allons le voir, l'erreur commise est nettement plus faible.

```python
def trapeze_optimise(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    x_values = [a + i * h for i in range(n + 1)]  # Calcul des valeurs x
    f_values = [f(x) for x in x_values]  # Stockage des valeurs de f(x)
    somme = 0.5 * (f_values[0] + f_values[-1])  # f(a) / 2 + f(b) / 2
    for i in range(1, n):
        somme += f_values[i]
    I = h * somme
    return I
```

Figure XXVI.15 – Méthode des trapèzes optimisée en stockant les évaluations par f généralement « coûteuses ».

Théorème 19 (Admis :-(: Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors
$$\mathrm{T}_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f\in\mathscr{C}^2([a\,;b])$, $\left|\mathrm{T}_n(f)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \mathrm{M}_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$ où $\mathrm{M}_2=\sup_{x\in[a;b]}|f''(x)|$.

Preuve : L'idée est la même que dans le cas de la méthode des trapèzes, mais en faisant intervenir l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour faire intervenir la dérivée seconde de f.

Le théorème (19) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{T}_n(f)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

VI.3 Méthode de Simpson

La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse a_k, a_{k+1} et $\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole).

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$Si_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)+4f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)+f(a_{k+1}).$$

Cette méthode donnes des valeurs approchées de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui convergent encore plus rapidement que les deux méthodes précédentes.

```python
def simpson_optimize(f, a, b, n):
    if n % 2 != 0:
        raise ValueError("Le nombre de sous-intervalles doit être pair
                                    pour la méthode de Simpson.")
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    x_values = [a + i * h for i in range(n + 1)]  # Calcul des valeurs x
    f_values = [f(x) for x in x_values]  # Stockage des valeurs de f(x)

    somme = f_values[0] + f_values[-1]  # f(a) + f(b)
   for i in range(1, n):
        if i % 2 == 0:
            somme += 2 * f_values[i]  # Termes pairs
        else:
            somme += 4 * f_values[i]  # Termes impairs
    I = (h / 3) * somme
    return I
```

Figure XXVI.16 – Méthode de Simpson optimisée en stockant les évaluations par f généralement « coûteuses ».

Théorème 20 (Totalement admis et (Hors-Programme)) : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors

$$\mathrm{Si}_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)+4f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)+f(a_{k+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f\in\mathscr{C}^4([a\,;b])$, $\left|\mathrm{Si}_n(f)-\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \mathrm{M}_4\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}$ où $\mathrm{M}_4=\sup\limits_{x\in[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Le théorème (20) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{Si}_n(f)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$ [6]

VII Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

VII.1 Définition

Définition 6 : Soit $f:[a\,;b]\to\mathbb{C}$ une fonction continue.

On appelle *intégrale de f sur* $[a\,;b]$, noté $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ le nombre complexe défini par :

$$\int_{[a;b]} f=\int_{[a;b]}\mathrm{Re}\,(f)+i\int_{[a;b]}\mathrm{Im}\,(f)$$

[6]. Ça commence à être pas mal mais on a mieux...

Exemple 12 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \end{array}$.

On a $\mathrm{Re}\,(f): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}$ et $\mathrm{Im}\,(f): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t). \end{array}$

D'où,

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^\pi + \mathrm{i}\,[-\cos(t)]_0^\pi = 2\,\mathrm{i}\,.$$

VII.2 Propriétés

Globalement, on va conserver toutes les propriétés sauf celles liées à la relation d'ordre et à la borne supérieure absentes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21 : Soient $f,\ g : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$, $c \in [a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Linéarité : $\displaystyle\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$

Relation de Chasles : $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right|_{\mathbb{C}} \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|_{\mathbb{C}}\,\mathrm{d}t.$

Preuve :

Linéarité : On écrit : $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)$ et $g = \mathrm{Re}\,(g) + i\mathrm{Im}\,(g)$, et $\lambda = u + iv$ (avec $u, v \in \mathbb{R}$). La démonstration est alors immédiate, en utilisant la linéarité de l'intégrale des fonctions réelles.

$$\begin{aligned}
\int_{[a;b]} (\lambda f + g) &= \int_{[a;b]} (\lambda\,[\mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)] + [\mathrm{Re}\,g + i\mathrm{Im}\,g]\,) \\
&= \int_{[a;b]} ((\lambda\mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{Re}\,g) + i(\lambda\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,g)) \\
&= \int_{[a;b]} (\lambda\mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{Re}\,g) + i\int_{[a;b]} (\lambda\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,g) \\
&= \lambda\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f) + \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,g + i\left(\lambda\int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(f) + \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,g\right) \\
&= \lambda\left(\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f) + i\int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(f)\right) + \left(\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,g + i\int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,g\right) \\
&= \lambda\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g
\end{aligned}$$

Relation de Chasles : À nouveau, il suffit d'écrire $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)$ et d'utiliser la relation de Chasles pour les fonctions réelles.

Inégalité triangulaire :

- Si $\displaystyle\int_{[a;b]} f = 0$ alors $\left|\displaystyle\int_{[a;b]} f\right| = 0$ et le résultat est clair par positivité de l'intégrale avec $|f| \geqslant 0$.
- Si $\displaystyle\int_{[a;b]} f \neq 0$ alors on note $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ i.e.

$$\int_{[a;b]} f = \left|\int_{[a;b]} f\right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \iff \left|\int_{[a;b]} f\right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} \int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}.$$

Posons $g = f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$ pour une meilleure visibilité.

Alors $\left|\displaystyle\int_{[a;b]} f\right| = \displaystyle\int_{[a;b]} g = \displaystyle\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(g) + \mathrm{i} \displaystyle\int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(g)$.

Or, $\left|\displaystyle\int_{[a;b]} f\right| \in \mathbb{R} \implies \displaystyle\int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(g) = 0$.

Donc, $\left|\displaystyle\int_{[a;b]} f\right| = \underbrace{\displaystyle\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(g) = \displaystyle\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}) \underset{\mathrm{Re}(z)\leqslant|z|}{\leqslant} \displaystyle\int_{[a;b]} |f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}| = \displaystyle\int_{[a;b]} |f|}_{\text{Intégrale de fonctions à valerus réelles}}$. Il en résulte que :

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|\,.$$

Remarques :

— $\mathbb{C}$ n'étant pas doté d'une relation naturelle d'ordre, on ne retrouve pour les fonctions à valeurs complexes ni la propriété de positivité de l'intégrale, ni la croissance de l'intégrale.

— Les formules de l'intégration par parties, de changement de variable, et la formule de Taylor avec reste intégral se généralisent sans difficulté.

— La formule de Taylor-Lagrange dépendant du théorème de Rolle n'est plus valable mais l'inégalité, comme celle des accroissements finis, subsiste pour les fonctions à valeurs complexes.

Index