XXVI

Intégration

Contenu

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, on considère deux réels a et b tels que $a < b$. L'intervalle $[a\,;b]$ est donc non trivial.

I Fonctions en escalier

I.1 Subdivision

Définition 1 : On appelle *subdivision* du segment $[a\,;b]$ toute suite finie de réels $s = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Le *pas de la subdivision* est l'écart maximum entre deux termes :

$$\max_{k \in [\![0, n-1]\!]} (a_{k+1} - a_k).$$

L'*image de la subdivision* est l'ensemble $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$.

Remarques :

- Si s est une subdivision de l'intervalle $[a\,;b]$ alors s contient les réels a et b.
- Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on dit que s_1 est plus fine que s_2, noté $s_2 < s_1$, si s_1 contient au moins tous les termes de la subdivision s_2.
- Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on peut définir la subdivision réunion de s_1 et s_2, notée $s_1 \vee s_2$, comme la subdivision de $[a\,;b]$ contenant tous les termes des subdivisions de s_1 et s_2.

  On remarquera qu'elle est plus fine que s_1 ET s_2.

Définition 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *subdivision régulière* de $[a\,;b]$, la subdivision $s = (a_1, \ldots, a_n)$ définie par :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]\,,\ a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

En particulier, pour une subdivision régulière, $\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]$,

$$a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}.$$

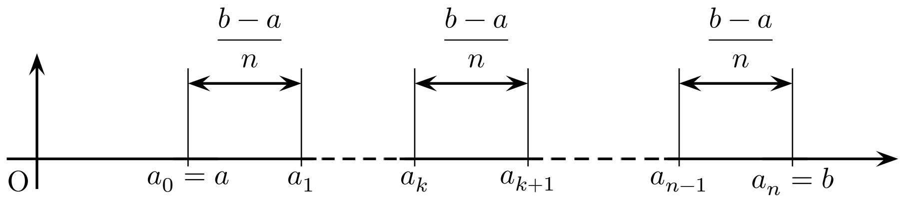


Figure XXVI.1 – Subdivision régulière d'un intervalle $[a\,;b]$

I.2 Fonctions en escalier

Définition 3 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$.

- On dit que f est *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$:

$$\exists\, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \;\text{ tels que }\; f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, \mathbb{1}_{]a_k;a_{k+1}[}.$$

  On note $\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$ leur ensemble.

- On dit alors que la *subdivision* est adaptée à f.

Toute fonction en escalier f vient donc avec au moins une subdivision adaptée à f.

Remarques :

— On parle aussi de fonction *constante par morceaux.*

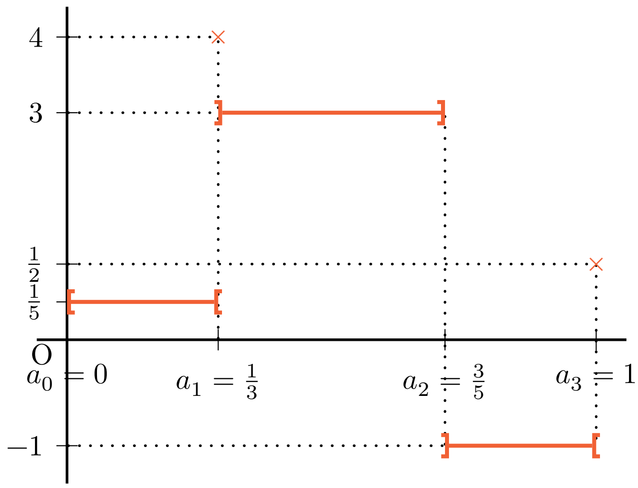
— **Aucune** condition n'est imposée aux valeurs de $f(a_k)$ mais une subdivision adaptée contient nécessairement tous les points de discontinuité de f.

— Une fonction en escalier est bornée.

En effet, elle prend un nombre fini de valeurs.

Une fonction prenant un nombre fini de valeurs est-elle nécessairement en escalier ?

— Il existe une infinité de subdivisions adaptées à une fonction en escalier : il suffit d'intercaler des termes à la suite.



$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right[\\ 4 & \text{si } x = \frac{1}{3} \\ 3 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{3}{5}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left]\frac{3}{5}\,;1\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{array}$$

Figure XXVI.2 – Exemple de fonction en escalier sur $[0\,;1]$.

Exemples 1 :

- Une fonction constante est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à toute subdivision de $[a\,;b]$.
- La fonction partie entière est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à la subdivision de $[a\,;b]$ constituée de a, b et de tous les entiers du segment $[a\,;b]$.

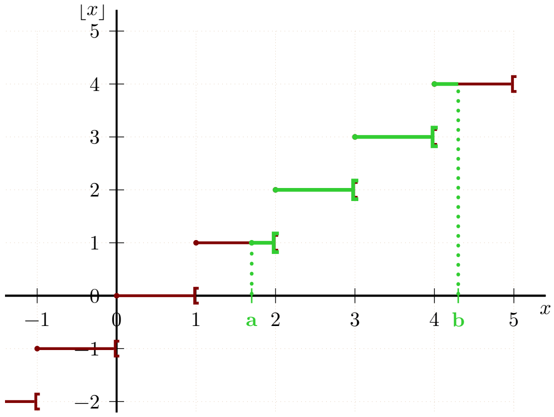


Figure XXVI.3 – La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a\,;b]$.

Proposition 1 : Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.

Preuve : Soient $= (a_1, \dots, a_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $s' = (a'_1, \dots, a'_p)$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ deux subdivision de $[a\,;b]$ respectivement adaptée à f et g.

$s \vee s'$ est clairement une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f et à g car elle contient tous les termes a_0, ..., a_n, a'_1, ..., a'_p.

Proposition 2 : Soient f, et g en escalier sur $[a\,;b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $f+g$, αf, fg, et $|f|$ sont en escalier sur $[a\,;b]$.

Preuve : D'après la proposition (1), il suffit de se placer sur une subdivision

$$s : a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

adaptée à f et g.

Sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ les deux fonctions f et g sont constantes, donc également $f+g$, αf, fg, et $|f|$ qui sont donc en escalier sur $[a\,;b]$ car la subdivision s est adaptée à chacune d'elles.

Corollaire 2.1 : L'ensemble $\left(\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})\,;+_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\,;\cdot_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\right)$ est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

II Intégrale des fonctions en escalier

II.1 Construction

Définition/Théorème 4 : Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ une fonction en escalier sur $[a\,;b]$ et $s : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note λ_k la valeur prise par f sur $]a_k, a_{k+1}[$.

On définit :

$$\mathrm{I}_s(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\lambda_k.$$

Alors, $\mathrm{I}_s(f)$ est indépendant du choix de la subdivision s adaptée à f.

On appelle *intégrale de f sur* $[a\,;b]$, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre $\mathrm{I}_s(f)$:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\lambda_k.$$

Exemple 2 : Si la fonction f est constante et prend la valeur λ sur $[a\,;b]$, son intégrale est $\displaystyle\int_{[a;b]} f = (b-a)\lambda$.
C'est l'aire algébrique du rectangle de longueur $b - a$ et de largeur λ.

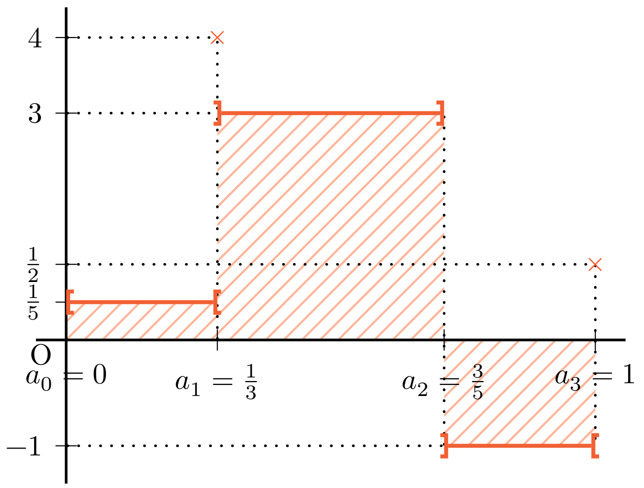


Figure XXVI.4 – Exemple d'intégrale d'une fonction en escalier avec la fonction de la figure XXVI.2.

Remarques :

— La valeur de f en chaque a_k n'intervient pas.

— Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $(a_{k+1} - a_k)\lambda_k$ est l'aire « algébrique » du rectangle de base $a_{k+1} - a_k > 0$ et de hauteur λ_k.

Cette aire est négative ou positive suivant le signe de λ_k.

— L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est la somme des aires algébriques des rectangles formés par la fonction en escalier avec l'axe des abscisses.

On retrouve le fait que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ corresponde à l'aire algébrique du domaine compris entre $(\mathrm{O}x)$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$.

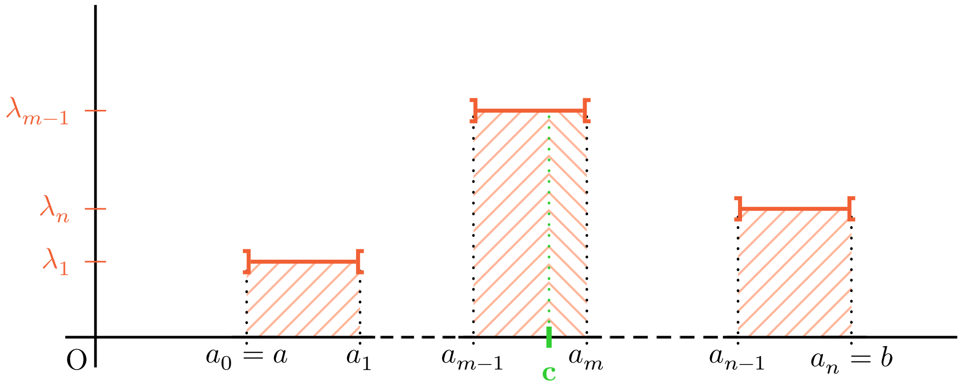


Figure XXVI.5 – L'intégrale de f est inchangée sur une subdivision plus fine.

Preuve : Cette définition est cohérente car le réel $(a_k - a_{k-1})\lambda_k$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

En effet :

1. L'intégrale est invariante si on ajoute un nombre fini de points à $s = (a_0, \dots, a_n)$. Il suffit de le montrer pour l'ajout d'un point.

   Si $s' = (a_0, \dots, a_{m-1}, c, a_m, \dots, a_n)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}'_s(f) &= (a_1 - a_0)\lambda_0 + \dots + (c - a_{m-1})\lambda_{m-1} + (a_m - c)\lambda_{m-1} + \dots + (a_n - a_{n-1})\lambda_n \\ &= (a_1 - a_0)\lambda_0 + \dots + (a_m - a_{m-1})\lambda_{m-1} + \dots + (a_n - a_{n-1})\lambda_n \\ &= \mathrm{I}_s(f).\end{aligned}$$

   L'intégrale de f est donc inchangée sur toute subdivision plus fine.

2. L'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.

   Soient s et s' deux subdivisions de $[a\,;b]$ adaptées à f. La subdivision $s \vee s'$ est plus fine que s et s'.

   D'après ce qui précède, $\mathrm{I}_s(f) = \mathrm{I}'_s(f) = \mathrm{I}_{s\vee s'}(f)$

   L'intégrale $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est donc indépendante de la subdivision choisie.

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{[0;n]} \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } 0<x<1\\ 3 & \text{si } x=1\\ -2 & \text{si } 1<x\leqslant 2\\ 4 & \text{si } 2<x\leqslant 4.\end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x\in[0,4]$, calculer $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

II.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 3 : Soient a et b deux réels tels que $a<b$.

Linéarité : $\forall\, f,\, g\in\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\int_{[a;b]}(\lambda f+g)(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_{[a;b]}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{[a;b]}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Relation de Chasles : $\forall\, f\in\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$, $\forall\, c\in\left]a\,;b\right[$.

$$\int_{[a;b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{[a;c]}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{[c;b]}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Positivité : $\forall\, f\in\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$.

$$\forall\, x\in[a\,;b]\,,\, f(x)\geqslant 0\implies\int_{[a;b]}f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

En particulier,

Croissance : $\forall\, f,\, g\in\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$, $\forall\, x\in[a\,;b]$,

$$f(x)\geqslant g(x)\implies\int_{[a;b]}f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_{[a;b]}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'application $\displaystyle\int:\begin{array}{ccc}\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]}f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$ est **croissante**.

Inégalité triangulaire : $\forall\, f\in\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$.

$$\left|\int_{[a;b]}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{[a;b]}|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a;b];\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est donc une forme linéaire.

Preuve :

Linéarité : Soient s et s' des subdivisions adaptées à f et g.

On pose $\sigma = s \vee s' = a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

$\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ et $g_{|]a_i;a_{i+1}[}$ sont des fonctions constantes respectivement égales à α_i et β_i. D'où,

$$\begin{aligned}\int_{[a;b]} (\lambda f+g)(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(\lambda\alpha_i+\beta_i) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de la somme}}}{=} \lambda\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\alpha_i + \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\beta_i \\ &= \lambda\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Relation de Chasles : Tout d'abord, remarquons que si $f \in \mathcal{E}([a;b];\mathbb{R})$ alors $f_{|[a;c]}$ et $f_{|[c;b]}$ le sont aussi.

Soit s une subdivision adaptée à f. On pose $s' = s \vee \{c\} = a_0 < \dots < a_n$ avec $p \in [\![1;n-1]\!]$ tel que $c = a_p$. s' est encore adaptée à f.

Alors $a_0 < \dots < a_p$ et $a_p, \dots < a_n$ sont respectivement des subdivisions de $[a;c]$ et $[c;b]$ adaptées à $f_{|[a;c]}$ et $f_{|[c;b]}$ et $\forall i \in [\![0;n-1]\!]$, $f_{|]a_i;a_{i+1}[} \equiv \lambda_i$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{p-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i + \sum_{p}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i \\ &= \sum_{0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i \\ &= \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Positivité : Comme f est positive, $\forall i \in [\![0;n-1]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$ et, aisément :

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{>0}\lambda_i \geqslant 0.$$

Il suffit alors d'appliquer ce résultat à la fonction $f-g$ est d'obtenir, par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in [a;b], f(x) \geqslant g(x) \implies \int_{[a;b]} \underbrace{(f(t)-g(t))}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Inégalité triangulaire : Cette inégalité se déduit de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et de la linéarité de la somme :

$$\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{>0}\lambda_i\right|$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\,|\lambda_i| = \int_{[a;b]} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

II.3 Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Théorème 4 ($\mathcal{E}([a\,;b]) \to \mathscr{C}^0([a\,;b])$ - Admis) :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right), \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}),\quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon. \tag{XXVI.1}$$

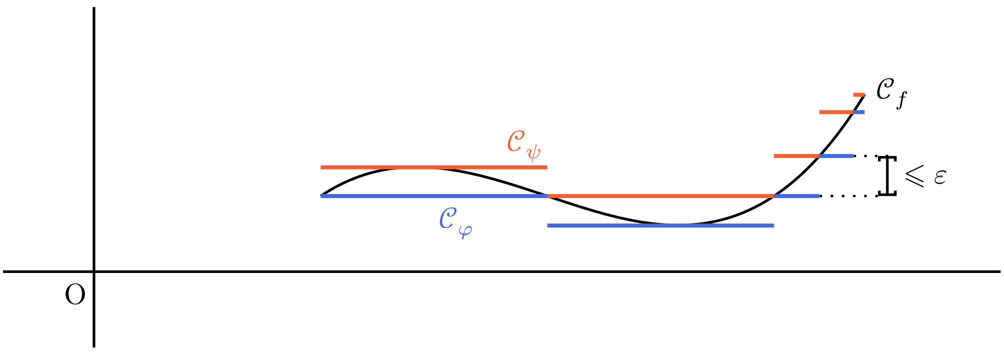


Figure XXVI.6 – Approximation d'une fonction continue par deux fonctions en escalier.

III Intégrale d'une fonction continue sur un segment

III.1 Construction

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Notons :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad \Big(0 \leqslant y \leqslant f(x) \text{ ou } f(x) \leqslant y \leqslant 0\Big) \right\}.$$

Si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ alors les nombres $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \psi$ donnent intuitivement des approximations par défaut et excès de l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$.

Pour définir l'aire de $\mathcal{D}$, on est ainsi conduit à introduire les ensembles suivants :

$$\mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) = \Big\{\psi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, f \leqslant \psi\Big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) = \Big\{\varphi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, \varphi \leqslant f\Big\}.$$

Ensembles des fonctions en escaliers sur $[a\,;b]$ qui majorent et minorent f sur $[a\,;b]$.

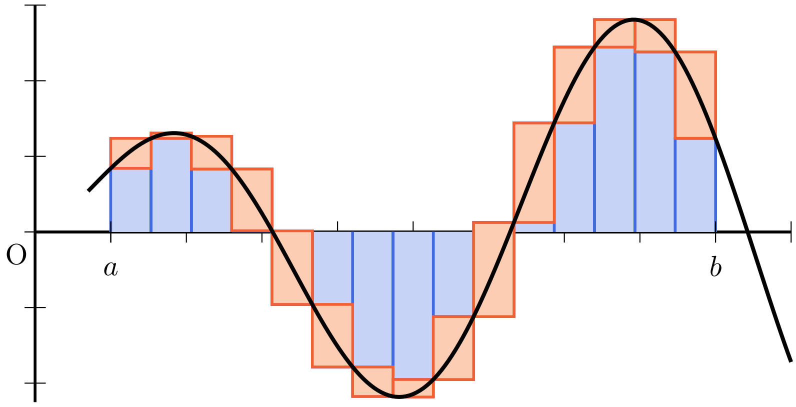


Figure XXVI.7 – Encadrement $\displaystyle\int_{[a\,;b]} \varphi \leqslant \int_{[a\,;b]} f \leqslant \int_{[a\,;b]} \psi$.

Théorème 5 : Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :

- $\mathrm{I}^-_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure $\mathscr{I}$.
- $\mathrm{I}^+_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne inférieure $\mathcal{I}$.

De plus, $\mathscr{I} = \mathcal{I}$.

Preuve : La fonction f étant continue sur le segment $[a\,;b]$, elle est bornée sur $[a\,;b]$.
Posons $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ et $\mathrm{M} = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.

- $\mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante égale à m. Donc, $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

  De plus, par construction pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)$, on a $\varphi \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$.

  D'où, $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \mathrm{M}(b-a)$ et l'ensemble $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$ est majoré.

  Partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$ possède une borne supérieure que l'on note $\mathscr{I}$.
- De la même manière, $\mathrm{I}^+_{[a;b]}$ est une partie non vide (contient la fonction constante M) et minorée (par $m(b-a)$) donc admet une borne inférieure que l'on note $\mathcal{I}$.
- Par construction, pour tout $(\varphi\,;\psi) \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \times \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)$, on a $\varphi \leqslant \psi$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} \psi$.

  Le nombre $\displaystyle\int_{[a;b]} \psi$ est donc un majorant de $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$. Il est donc supérieur au plus petit d'entre eux $\mathscr{I}$ i.e.

  $$\forall\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f),\ \mathscr{I} \leqslant \int_{[a;b]} \psi.$$

  Le réel $\mathscr{I}$ est donc un minorant de $\mathrm{I}^+_{[a;b]}$ donc certainement plus petit que le plus grand d'entre eux $\mathcal{I}$ i.e.

  $$\mathscr{I} \leqslant \mathcal{I}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème (XXVI.1), il existe $(\varphi ; \psi) \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \times \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)$ telles que $(0 \leqslant)\, \psi - \varphi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ce qui implique notamment

$$\int_{[a;b]} \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

Or, par définition de $\mathcal{I}$ et $\mathscr{I}$, on a :

$$\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \mathscr{I} \leqslant \mathcal{I} \leqslant \int_{[a;b]} \psi \implies 0 \leqslant \mathcal{I} - \mathscr{I} \leqslant \int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \varphi = \int_{[a;b]} \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

Encadrement vrai pour tout ε strictement positif aussi petit que l'on veut i.e. $\mathscr{I} = \mathcal{I}$.

Définition 5 : Soit $f : [a ; b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre réel défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \sup\left\{ \int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \right\} = \inf\left\{ \int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) \right\}.$$

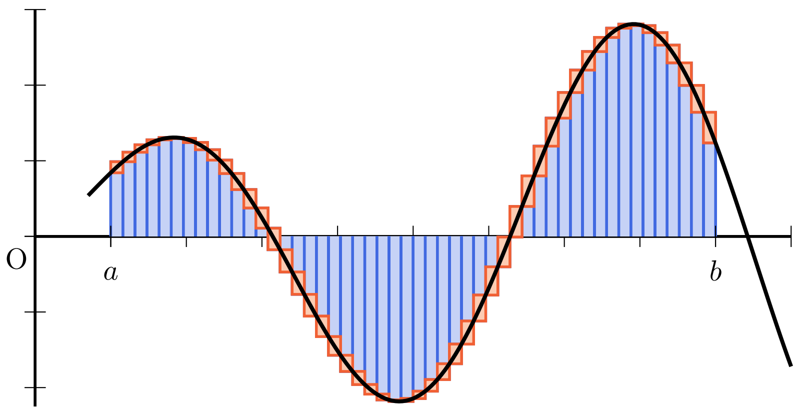


Figure XXVI.8 – Pour f continue sur $[a ; b]$, $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \sup\left\{ \int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \right\} = \inf\left\{ \int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) \right\}$.

Interprétation géométrique : $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$ du plan situé entre le graphe de f, l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe $(\mathrm{O}x)$, négativement en dessous) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

— Les fonctions pour lesquelles $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]} = \inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ sont dites *intégrables au sens de Riemann sur* $[a ; b]$ ou Riemann-intégrables.

— Pour toute fonction continue f sur $[a ; b]$ et toute subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a ; b]$, on peut poser :

$$\mathrm{M}_i = \sup_{x \in [x_{i-1} ; x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1} ; x_i]} f(x).$$

On appelle alors *sommes de Darboux* inférieure $\mathrm{L}_{f,\sigma}$ et supérieure $\mathrm{U}_{f,\sigma}$ de f selon σ, les réels :

$$\mathrm{L}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mathrm{M}_i.$$

Par construction, $\mathrm{L}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^-_{f,[a;b]}$ et $\mathrm{U}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^+_{f,[a;b]}$.

— Ce théorème prouve que les que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann.

— Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann non continues, par exemple les fonctions en escalier.

— Il existe des fonctions non intégrables au sens de Riemann. Par exemple, l'indicatrice de $\mathbb{Q}$,

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

est non intégrable car ses sommes de Darboux inférieures et supérieures seraient nécessairement respectivement égales à 0 et 1.

— Si f est une fonction en escalier, $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ se trouve à la fois dans $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et dans $\mathrm{I}^+_{[a;b]}$.

Donc la valeur commune de $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et $\inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ n'est autre que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

Les deux définitions de l'intégrale (pour une fonction en escalier, et pour une fonction continue) sont cohérentes.

Méthode 1 (Montrer qu'une fonction est Riemann-Intégrable) :
Pour justifier l'existence d'une intégrale, il suffit donc de dire c'est celle d'une fonction en escalier, ou d'une fonction continue sur un segment, ou se prolonge par continuité sur un segment.

Exemple 4 : L'écriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ a un sens mais $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ n'en a pas (cette année...).

III.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

Proposition 6 (Linéarité) : Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$\int_{[a;b]} \alpha f + g = \alpha \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$$

Preuve : *Montrons séparément que* $\displaystyle\int_{[a;b]} f + g = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$ *et* $\displaystyle\int_{[a;b]} \alpha f = \alpha \int_{[a;b]} f$.

1. *Soient f, g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$.*

On fixe $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème d'approximation, il existe quatre fonctions :

$\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}([a\,;b])$ telles que :

$$\begin{cases} \phi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1 \\ \psi_1 - \phi_1 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2 \\ \psi_2 - \phi_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{cases} \tag{XXVI.2}$$

Alors, en additionnant, on obtient $\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 \leqslant f + g \leqslant \psi_1 + \psi_2 \\ (\psi_1 + \psi_2) - (\phi_1 + \phi_2) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a} \end{cases}$.

Posons $\phi = \phi_1 + \phi_2$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$ qui sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ et vérifiant :

$$\phi \leqslant \quad f + g \quad \leqslant \psi \tag{XXVI.3}$$

$$\psi - \phi \quad \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{XXVI.4}$$

– Les fonctions $\psi - \phi$ et ε sont en escalier et, par croissance de l'intégrale (des fonctions en escalier), les inégalités (XXVI.4) donnent :

$$\int_{[a;b]} (\psi - \phi) \leqslant \int_{[a;b]} \frac{\varepsilon}{b-a},$$

puis, par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi \leqslant \varepsilon. \tag{XXVI.5}$$

– Par ailleurs, (XXVI.3) entraine

$$\int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} (f+g) \leqslant \int_{[a;b]} \psi. \tag{XXVI.6}$$

De même, les encadrements de (XXVI.2) fournissent

$$\int_{[a;b]} \phi_1 \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi_1 \quad \text{et} \quad \int_{[a;b]} \phi_2 \leqslant \int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} \psi_2.$$

Puis, en sommant membre à membre,

$$\int_{[a;b]} \phi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de} \\ \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \int_{[a;b]} \phi_1 + \int_{[a;b]} \phi_2 \leqslant \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \leqslant \int_{[a;b]} \psi_1 + \int_{[a;b]} \psi_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de} \\ \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \int_{[a;b]} \psi.$$

Retournant ces inégalités, on a :

$$-\int_{[a;b]} \psi \leqslant -\left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g\right) \leqslant -\int_{[a;b]} \phi,$$

Inégalités qui, ajoutées à celles de (XXVI.6) s'écrivent :

$$-\left(\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi\right) \leqslant \int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g\right) \leqslant \int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi.$$

Un soupçon de (XXVI.5) pour aboutir à

$$-\varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \right) \leqslant \varepsilon.$$

$$0 \leqslant \left| \int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

La quantité (fixe) $\left| \int_{[a;b]} (f+g) - \left(\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g \right) \right|$ étant comprise entre 0 et ε quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit qu'elle est nulle.

En conclusion, $\int_{[a;b]} (f+g) = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$.

$\boxed{2}$ Le raisonnement est quasiment identique.

Soient f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le résultat étant évident sinon, on peut supposer $\alpha \neq 0$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème d'approximation, il existe $\phi, \psi \in \mathcal{E}([a\,;b])$ telles que

$$\begin{cases} \phi \leqslant f \leqslant \psi \\ \psi - \phi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\alpha(b-a)} \end{cases}$$

– Si $\alpha \geqslant 0$, on a $\alpha\phi \leqslant \alpha f \leqslant \alpha\psi$, et donc par définition de $\int_{[a;b]} \alpha f$:

$$\alpha \int_{[a;b]} \phi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de } \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \int_{[a;b]} \alpha\phi \leqslant \int_{[a;b]} (\alpha f) \leqslant \int_{[a;b]} \alpha\psi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de } \int \text{ sur } \mathcal{E}}}{=} \alpha \int_{[a;b]} \psi.$$

Par ailleurs, par définition de $\int_{[a;b]} f$ on a aussi :

$$\int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi \implies \alpha \int_{[a;b]} \phi \leqslant \alpha \int_{[a;b]} f \leqslant \alpha \int_{[a;b]} \psi.$$

On en déduit :

$$-\alpha \left(\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi \right) \leqslant \int_{[a;b]} (\alpha f) - \alpha \int_{[a;b]} f \leqslant \alpha \left(\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi \right).$$

Mais, on a encore $\int_{[a;b]} \psi - \int_{[a;b]} \phi = \int_{[a;b]} (\psi - \phi) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$.

D'où,

$$-\varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} (\alpha f) - \alpha \int_{[a;b]} f \leqslant \varepsilon \iff 0 \leqslant \left| \int_{[a;b]} (\alpha f) - \alpha \int_{[a;b]} f \right| \leqslant \varepsilon.$$

L'encadrement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{[a;b]} (\alpha f) = \alpha \int_{[a;b]} f$.

– Si $\alpha < 0$, le raisonnement est identique en n'omettant pas d'inverser les inégalités en multipliant par α.

Dans tous les cas,

$$\int_{[a;b]} (\alpha f) = \alpha \int_{[a;b]} f.$$

Remarque : L'application $\int : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{[a;b]} f \end{array}$ est désormais aussi une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

Proposition 7 (Relation de Chasles) : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $c \in [a\,;b]$.
Alors :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Preuve : Soient $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$ et $\phi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)$. Il est clair qu'il en est de même pour ses restrictions $\phi_{|[a;c]} \in \mathcal{E}^-_{[a;c]}\left(f_{|[a;c]}\right)$ et $\phi_{|[c;b]} \in \mathcal{E}^-_{[c;b]}\left(f_{|[c;b]}\right)$.

Par linéarité de l'intégrale sur les fonctions en escaliers et par définition de l'intégrale sur les fonctions continues, on a :

$$\int_{[a;b]} \phi = \int_{[a;c]} \phi + \int_{[c;b]} \phi \leqslant \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Le réel $\int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$ est donc un majorant de $\mathrm{I}^-_{f,[a;b]}$ donc plus grand que le plus petit d'entre eux i.e.

$$\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Par linéarité, on peut maintenant appliquer ce résultat à $-f$ qui donne les inégalités inverses et l'égalité.

Donc $\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$.

Remarque : On peut, bien sûr, réitérer le même raisonnement en considérant et $\psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)$ et montrer que $\int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$ est un minorant de $\mathrm{I}^+_{f,[a;b]}$ puis $\int_{[a;b]} f \geqslant \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$.

On conclut alors encore à l'égalité.

Notations : Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$).

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. On définit le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f$ si $a < b$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[b;a]} f$ si $a > b$.

La relation de Chasles et la linéarité sont alors vraies pour a, b et c quelconques.

Corollaire 7.1 : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$.

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Preuve : *Sans perte de généralités, supposons* $a < b$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f - \int_{[a;b]} f = 0 \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En posant $a = b$, *le seul nombre égal à son opposé est toujours* 0 *et* $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Proposition 8 (Relation d'ordre) :

Positivité de l'intégrale : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0. \tag{XXVI.7}$$

Croissance de l'intégrale : Soient f, $g \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g.$$

Inégalité triangulaire : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|\,.$$

Preuve :

1. *La fonction nulle sur* $[a\,;b]$ *est en escalier et elle est, par hypothèse, inférieure à* f.

   Par définition de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, *on a donc* $\displaystyle\int_{[a;b]} 0 \leqslant \int_{[a;b]} f$ *i.e.* $\displaystyle 0 \leqslant \int_{[a;b]} f$.

2. *Si* $f \leqslant g$ *alors* $g - f \geqslant 0$ *et on applique le résultat précédent :* $\displaystyle\int_{[a;b]} (g-f) \geqslant 0$.

   Par linéarité, $\displaystyle\int_{[a;b]} g - \int_{[a;b]} f \geqslant 0$ *et finalement,* $\displaystyle\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$.

3. *Il suffit de remarquer que* $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ *et appliquer les résultats précédents.*

Par croissance, on a :

$$\int_{[a;b]}(-|f|) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} |f| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité de } \int}}{\implies} -\int_{[a;b]} |f| \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} |f|,$$

Finalement, $\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$.

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

On considère $\mathrm{P}(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le signe de $\mathrm{P}(\lambda)$.
2. En déduire que $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Peut-on offrir une réciproque à l'implication (XXVI.7) ? La réponse est oui mais à une condition.

Théorème 9 : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}_+)$ une fonction continue à valeurs **positives**.

$$\int_{[a;b]} f = 0 \iff f = 0_{\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R}_+)}.$$

Preuve : Le sens réciproque est l'expression de (XXVI.7).

Par contraposition, supposons que f ne soit pas identiquement nulle sur $[a\,;b]$ i.e. qu'il existe $x_0 \in [a\,;b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On a donc $f(x_0) > 0$.

Supposons que $x_0 \in]a,b[$.

Comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, x \in [a\,;b]$,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{f(x_0)}{2} \implies f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

Posons $\phi : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0)}{2} & \text{si } x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

On a $\phi \in \mathcal{E}_{[a;b]}$ et $\phi \leqslant f$.

Par définition de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, on a :

$$\int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} f \iff 0 < \frac{f(x_0)}{2} 2\eta \leqslant \int_{[a;b]} f.$$

L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ ne peut donc pas être nulle.

Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, on fait le même raisonnement en travaillant d'un seul côté sur des intervalles de la forme $[a, x_0 + \eta[$ ou $]x_0 - \eta, b]$.

ATTENTION

Faux pour les fonctions *non positives* comme sin sur $[0, 2\pi]$ ou *non continues* comme

$$\begin{array}{rccl} \delta_0 : & [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (Prélude à l'année prochaine) : Montrer que l'application $\cdot \mid \cdot$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \cdot \mid \cdot : & \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f\,;g) & \longmapsto & f \mid g = \displaystyle\int_{[a;b]} fg \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

III.3 Inégalité de la moyenne

Proposition 10 : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$m \leqslant f \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \mathrm{M}(b-a). \tag{XXVI.8}$$

Preuve : Il suffit de prendre l'intégrale dans les inégalités $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$.

D'un point de vue graphique, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur.

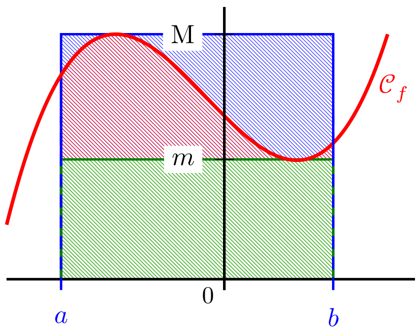


Figure XXVI.9 – Inégalité de la moyenne.

Théorème 11 (Valeur moyenne d'une fonction) : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$.

Alors il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c). \tag{XXVI.9}$$

Le nombre $\mu = f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors appelé la *valeur moyenne* de f sur $[a\,;b]$.

Preuve : La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ elle y est bornée par deux réels $m = \min\limits_{[a;b]} f$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{[a;b]} f$ et on a :

$$\forall\, x \in a\,;b, \quad m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

D'après la relation (XXVI.8), on a alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{M}(b-a) \iff m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{M}.$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient donc à l'intervalle $f([a\,;b]) = [m\,;\mathrm{M}]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f continue sur $[a\,;b]$, il existe donc un [1] réel $c \in [a\,;b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

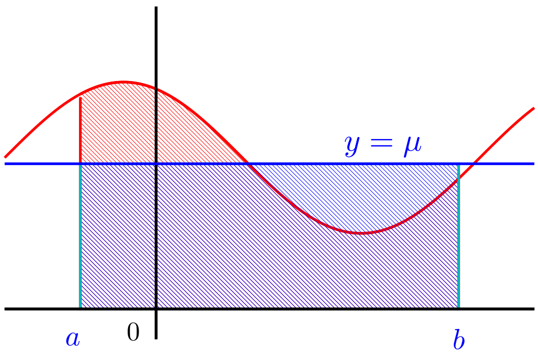


Figure XXVI.10 – Le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle bleu dont les côtés ont pour mesures $b-a$ et μ.

[1]. La valeur moyenne de f est comprise entre son minorant et son majorant.

IV Intégration et Dérivation

IV.1 Théorème Fondamental de l'analyse

Théorème 12 (Théorème Fondamental de l'analyse) : Soit f une fonction continue sur un *intervalle* I, et $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Preuve : Supposons que $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$. Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in \mathrm{I}$.

$$\mathrm{F}(x_0+h) - \mathrm{F}(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - hf(x_0)\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

f étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, t \in \mathrm{I}, \quad |t - x_0| \leqslant \eta \implies |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

Si $0 < h < \eta$, on a donc $\left|\dfrac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$

D'où $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h} = f(x_0).$

Idem si $h < 0$.

On en déduit que F est dérivable en x_0 et que $\mathrm{F}'(x_0) = f(x_0)$.

Si x_0 est une extrémité de I, le raisonnement est identique mais on n'a à travailler que d'un côté.

En conclusion, F est une primitive de f qui vérifie $\mathrm{F}(a) = \displaystyle\int_a^a f = 0$.

Supposons alors que G soit une autre primitive de f s'annulant en a.

Dans ce cas $(\mathrm{F}-\mathrm{G})' = f - f = 0$. La fonction $\mathrm{F}-\mathrm{G}$ dont la dérivée est nulle sur l'intervalle I est donc constante à $\mathrm{F}(a) - \mathrm{G}(a) = 0$ sur I.

Les deux primitives F et G sont donc égales.

Corollaire 12.1 : Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

- La primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$ par définition.
- Le théorème ne s'applique pas aux fonctions discontinues. Par exemple, la fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $[0, 2]$.

ATTENTION Cela ne contredit en rien le fait que la fonction partie entière soit intégrable. Le théorème fondamental donne juste une condition suffisante d'existence d'une primitive. Cette condition n'est même pas nécessaire vue la remarque suivante.

- Il existe toutefois des fonctions non continues ayant des primitives.

Exemple 5 : La fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

dont la dérivée $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ n'est pas continue (en 0).

La fonction g admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ sans y être continue.

IV.2 Calcul d'intégrales

Théorème 13 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in \mathrm{I}$.

Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Preuve : D'après le théorème (12), $\mathrm{F}_0 : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I s'annulant en a.

Comme F est une autre primitive de f sur l'intervalle I, il existe une constante k telle que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + k$.

On a donc $\mathrm{F}(a) = \cancel{\mathrm{F}_0(a)} + k \iff k = \mathrm{F}(a)$.

Finalement, $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \mathrm{F}(a)$, i.e. $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}_0(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) \iff \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$.

En particulier, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Notation : On note $= \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b$ la quantité $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Ainsi, $$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).}$$

Exemple 6 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$

Corollaire 13.1 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Exercice 4 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

IV.3 Intégration par parties

Théorème 14 : Soient u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Soient $a, b, \in$ I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$, elles sont dérivables.
Le produit uv est donc dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

De plus, u, v étant de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions u', v', sont continues sur I. Les fonctions $u'v$, uv' et donc $(uv)'$ sont alors continues sur I. Les intégrales sont donc bien définies.

On a $\displaystyle\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + uv')$.

Or, $\displaystyle\int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$ et $\displaystyle\int_a^b (u'v+uv') = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$.

Donc, $\displaystyle\Big[uv\Big]_a^b = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 7 : $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\arctan(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$

Exercice 5 : Soient $x > 1$ et $\mathrm{F}_n(x) = \displaystyle\int_1^x \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{F}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{F}_n(x)$.
2. En déduire la valeur de $\mathrm{F}_n(x)$.

IV.4 Changement de variables

Théorème 15 : Soient :

- f une fonction continue sur J ;
- ϕ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
- $a, b \in \mathrm{J}$.

Alors :

$$\int_a^b \phi'(t) f(\phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve : La fonction f étant continue sur J, elle admet une primitive F, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \to & \phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \phi(t) & \mapsto & \mathrm{F}(\phi(t)) \end{array}$$

La fonction $\mathrm{F} \circ \phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$, comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Et, $\forall\, t \in \mathrm{I}, \quad (\mathrm{F} \circ \phi)'(t) = \phi'(t) \times (\mathrm{F}' \circ \phi)(t) = \phi'(t) \times f(\phi(t))$.

Cette dernière fonction étant continue sur I, on peut intégrer sur $[a\,;b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi'(t) \times f(\phi(t))\,\mathrm{d}t &= \Big[(\mathrm{F} \circ \phi)'(t)\Big]_a^b \\ &= \mathrm{F}(\phi(b)) - \mathrm{F}(\phi(a)) \\ &= \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_{\phi(a)}^{\phi(b)} \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Méthode 2 (Changement de variables dans la pratique) :

1. On dit qu'on pose $x = \phi(t)$, et on vérifie que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
2. On a $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On n'oublie pas de changer les bornes : lorsque t varie de a à b, x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

$$\int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{f(x)}\,\underbrace{\phi'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 8 : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

La fonction f est une fraction rationnelle ne possédant pas de pôles réels donc bien définie et au moins continue sur $[0\,;1]$.

Une mise sous forme canonique du dénominateur $1+x+x^2 = \frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ encourage à effectuer le changement de variables

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}.$$

1. Posons $x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}$.

   Lorsque $x \in [0\,;1]$, $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.

   Le changement de variable $x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}$ est fonction affine de t donc clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.
2. $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$.
3. D'où,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}\\ &= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

Corollaire 15.1 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) : Soient $a>0$ et f une fonction continue sur l'intervalle considéré.

1. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et T-périodique ($\mathrm{T}>0$) alors pour tous réels a, b on a :

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve :

1. En effectuant le changement de variable $t=-x$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En effectuant le changement de variable $t=-x$, on constate que cette intégrale est égale à son opposé.
3. De même, pour une fonction continue et T-périodique, un changement de variable $x = t+\mathrm{T}$ permet de montrer que $\displaystyle\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour la deuxième formule, utilisons d'abord la relation de Chasles pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(t)\,dt &= \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^{a+T} f(t)\,dt}_{u=t-T} \\
&= -\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(u+T)\,du \\
&= \cancel{-\int_0^a f(t)\,dt} + \int_0^T f(x)\,dx + \cancel{\int_0^a f(u)\,du} = \int_0^T f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

V Formules de Taylor

V.1 Théorème de Taylor-Lagrange

Théorème 16 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque : Pour $n = 0$, on retrouve le *théorèmes des accroissements finis.*

Preuve : *Considérons une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et posons :*

$$\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A,$$

où A est tel que $\varphi(a) = 0$ i.e.

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

La fonction φ est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or, $\forall\, x \in\,]a\,;b[$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\mathrm{A} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^{k}}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\mathrm{A} \\
&= -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\mathrm{A} \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}(\mathrm{A} - f^{(n+1)}(x)).
\end{aligned}$$

Comme $c \neq b$, la condition $\varphi'(c) = 0$ entraîne $\mathrm{A} = f^{(n+1)}(c)$.

On obtient l'égalité demandée, en traduisant $\varphi(a) = 0$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Corollaire 16.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a la majoration :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad \text{avec } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Exemple 9 : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \longmapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \longmapsto z^n \exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| z^{n+1} \exp(zx) \right|.$$

En notant $z = a + \mathrm{i}\,b$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leqslant \exp(|a|)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'où le résultat.

Exercice 7 : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $\mathrm{M} = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a, b]\}$.

Montrer que $\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{4}$.

V.2 Formule de Taylor avec reste intégral (Hors-Programme)

Théorème 17 (Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formule de Taylor avec reste intégral, est la seule formule de Taylor à donner une expression précise du reste. Elle est très utile lorsqu'on s'intéresse à la régularité de ce dernier comme on le verra plus loin.

Preuve : On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \ f \in \mathscr{C}^{n+1}([a\,;b]\,;\mathbb{R}) \implies f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

– Pour $n = 0$, c'est le théorème fondamental de l'analyse. En effet, pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \iff f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^0}{0!} f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

La proposition $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

– Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $f \in \mathscr{C}^{n+2}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

Elle est, en particulier, de classe $\mathscr{C}^{n+1}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ et on a donc

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tout repose alors sur la formule d'intégration par parties :

Les fonctions $f^{(n+1)}$ et $x \longmapsto \dfrac{(b-x)^n}{n!}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, il est légitime d'intégrer par parties pour écrire :

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x. \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

La relation est donc héréditaire.

– Étant initialisée pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème (17) permet de redémontrer très facilement l'inégalité du corollaire (16.1) :

Preuve : Il suffit de majorer le reste de la formule de Taylor à l'aide de l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^b \underbrace{\frac{(b-x)^n}{n!}}_{\geqslant 0 \text{ sur } [a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \mathrm{M}_{n+1} \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Exemple 10 (Une application aux inégalités) : Montrons que :

$$\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au sinus (clairement de classe $\mathscr{C}^5$) à l'ordre 4 entre 0 et un x quelconque de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^5}{120}$.

Donc, $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 8 : Montrer que pour tout $\geqslant 0$, $\quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exemple 11 (Une application aux suites) : La fonction exp est clairement de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Appliquée à l'ordre n sur l'intervalle $[0\,;1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$\begin{aligned}\exp(1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{e} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!} \int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

V.3 Formule de Taylor-Young

Corollaire 17.1 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ et tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, le théorème (17) à l'ordre $n-1$ s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \int_a^x \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t \quad (= \mathrm{O}\left((b-a)^n\right)).$$

En retranchant le terme en $k = n$, on obtient :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Or, petite astuce, $\displaystyle\int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}t = \frac{(x-a)^n}{n!}$,

$$= \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right) \mathrm{d}t$$

On suppose ici $x \leqslant a$ (le raisonnement serait identique avec $x \geqslant 0$) et on applique l'inégalité de la moyenne :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} \left| f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \right| \mathrm{d}t$$

Comme $f^{(n)}$ est continue au voisinage de a, $\exists\, \alpha > 0$ tel que $|t-a| < \alpha \implies \left| f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \right| < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $x \in \,]a-\alpha\,; a+\alpha[\, \cap\, \mathrm{I}$ et tout t de $[a\,; x]$, on aura $|t-a| < \alpha$ puis,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \varepsilon \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}t = \varepsilon \frac{(x-a)^n}{n!} \leqslant \varepsilon (x-a)^n.$$

D'où le résultat.

À retenir ! :

- Contrairement au développement limité au voisinage de a où le reste n'est négligeable que localement dans le corollaire (17.1), la majoration du corollaire (16.1) est globale : elle est valide pour tous a, x d'un intervalle où f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et donne une majoration explicite du reste.
- L'expression explicite du reste sous la forme d'une intégrale est donnée par le théorème (17).

VI Sommes de Riemann

VI.1 Méthode des rectangles

Théorème 18 : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$).

Alors

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ est une *somme de Riemann* associée à f sur $[a\,;b]$.

Interprétation graphique : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\frac{b-a}{n} f(a_k) = (a_{k+1} - a_k) f(a_k)$ donc $\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ représente la somme des aires algébriques des rectangles R_k de base $a_{k+1} - a_k$ et de hauteur $f(a_k)$ pour k variant de 0 à $n-1$.

En d'autres termes, le théorème (18) affirme donc que pour une fonction continue sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{S}_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

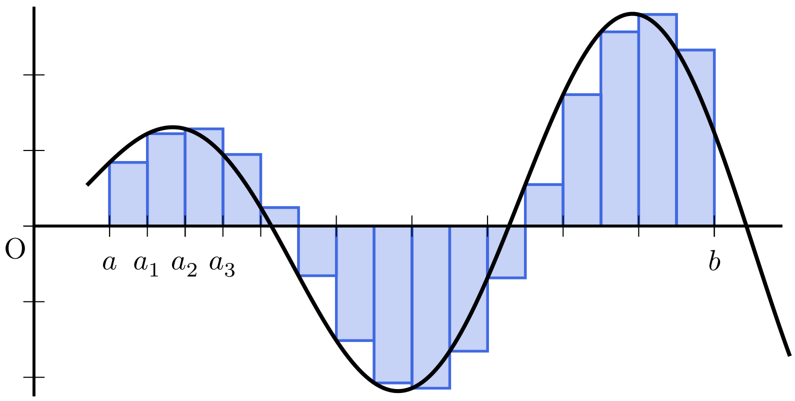


Figure XXVI.11 – Méthode des rectangles (à gauche).

Preuve : *Conformément au programme, on suppose pour cette démonstration que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$. En particulier, la continuité de sa dérivée sur l'intervalle $[a\,;b]$ entraîne que f est λ-lipschitzienne en posant $\lambda = \sup_{x\in[a;b]} |f'(x)|$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision régulière de $[a\,;b]$ par $x_k = a + kh$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

On a bien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

La somme de Riemann s'écrit alors

$$\mathrm{S}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$

```
def rectangle_gauche(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    sum_rectangles = 0.0
   for i in range(n):
        x_i = a + i * h  # Bord gauche de chaque sous-intervalle
        sum_rectangles += f(x_i)
   I = h * sum_rectangles
    return I
```

Figure XXVI.12 – Méthode des rectangles à gauche

D'où,

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{S}_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(hf(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| && \left(\text{Linéarité de } \sum\right) \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| && \left(h = x_{k+1} - x_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}t\right) \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big(f(x_k) - f(t)\Big)\,\mathrm{d}t\right| && \left(\text{Linéarité de } \int\right) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) - f(t)\,\mathrm{d}t\right| && (\text{Inégalité triangulaire pour les sommes}) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big|f(x_k) - f(t)\Big|\,\mathrm{d}t && (\text{Inégalité triangulaire pour les intégrales}) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \lambda\,|x_k - t|\,\mathrm{d}t && (f \text{ est } \lambda\text{-lipschitzienne}) \\
&\leqslant \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |x_k - t|\,\mathrm{d}t && \left(\text{Linéarité de } \sum \text{ et } \int\right)
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |x_k - t|\,\mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} = \frac{h^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$.

D'où, $\displaystyle\left|\mathrm{S}_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{2n^2} = \lambda\frac{(b-a)^2}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Remarque : Le terme $\lambda\dfrac{(b-a)^2}{2n}$ est un majorant de l'erreur commise en calculant $\mathrm{S}_n(f)$ à la place de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Plus sa vitesse de convergence vers 0 sera grande, meilleure sera l'approximation.

Remarques : Dans la pratique, on se ramène toujours à l'intervalle $[0\,;1]$:

— Si f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ alors :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— De même, on peut montrer que si f est continue sur $[0\,;1]$ on a aussi :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Dans tous les cas, $\mathrm{S}_n(f)$ représente la moyenne des n valeurs prises par f en les x_k sur l'intervalle $[a\,;b]$ ou $[0\,;1]$.

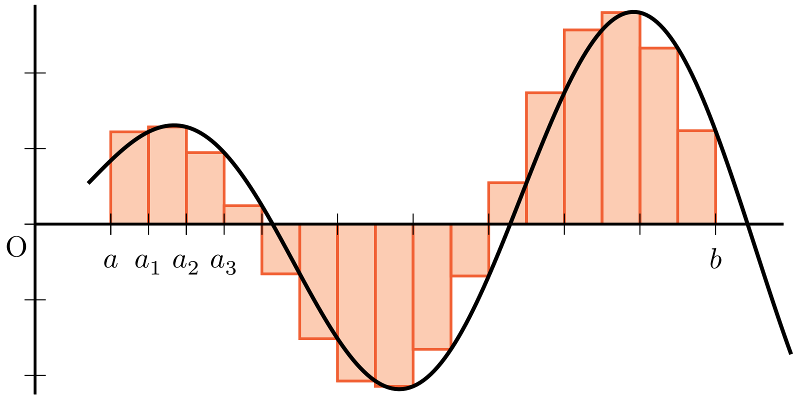


Figure XXVI.13 – Méthode des rectangles (à droite).

Exercice 9 : Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x\ ,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

VI.2 Méthode des trapèzes

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse a_k et a_{k+1}.

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}.$$

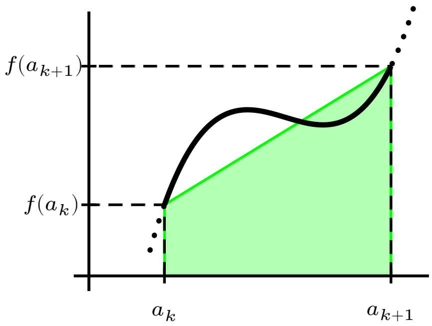


Figure XXVI.14 – Méthode des trapèzes.

```python
def trapeze_optimise(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    x_values = [a + i * h for i in range(n + 1)]  # Calcul des valeurs x
    f_values = [f(x) for x in x_values]  # Stockage des valeurs de f(x)
    somme = 0.5 * (f_values[0] + f_values[-1])  # f(a) / 2 + f(b) / 2
    for i in range(1, n):
        somme += f_values[i]
    I = h * somme
    return I
```

Figure XXVI.15 – Méthode des trapèzes optimisée en stockant les évaluations par f généralement « coûteuses ».

Théorème 19 (Admis :-( ) : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$).

Alors

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f \in \mathscr{C}^2([a\,;b])$, $\left|\mathrm{T}_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_2\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ où $\mathrm{M}_2 = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$.

Preuve : L'idée est la même que dans le cas de la méthode des trapèzes, mais en faisant intervenir l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour faire intervenir la dérivée seconde de f.

Le théorème (19) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{T}_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

VI.3 Méthode de Simpson

La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse a_k, a_{k+1} et $\dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole).

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$\mathrm{Si}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1}).$$

Théorème 20 (Totalement admis et (Hors-Programme)) : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$).

Alors

$$\mathrm{Si}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

```python
def simpson_optimize(f, a, b, n):
    if n % 2 != 0:
        raise ValueError("Le nombre de sous-intervalles doit être pair
                                          pour la méthode de Simpson.")
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    x_values = [a + i * h for i in range(n + 1)]  # Calcul des valeurs x
    f_values = [f(x) for x in x_values]  # Stockage des valeurs de f(x)

    somme = f_values[0] + f_values[-1]  # f(a) + f(b)
   for i in range(1, n):
        if i % 2 == 0:
            somme += 2 * f_values[i]  # Termes pairs
        else:
            somme += 4 * f_values[i]  # Termes impairs
    I = (h / 3) * somme
    return I
```

Figure XXVI.16 – Méthode de Simpson optimisée en stockant les évaluations par f généralement « coûteuses ».

De plus, si $f \in \mathscr{C}^4([a\,;b])$, $\left|\mathrm{Si}_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_4 \dfrac{(b-a)^5}{180n^4}$ où $\mathrm{M}_4 = \sup\limits_{x\in[a;b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

Le théorème (20) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{Si}_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$ [2]

VII Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

VII.1 Définition

Définition 6 : Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

On appelle *intégrale de f sur* $[a\,;b]$, noté $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ le nombre complexe défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f) + i \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(f)$$

Exemple 12 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \end{array}$.

On a $\mathrm{Re}\,(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}$ et $\mathrm{Im}\,(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t). \end{array}$

[2]. Ça commence à être pas mal mais on a mieux...

D'où,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\pi} + \mathrm{i}\,[-\cos(t)]_0^{\pi} = 2\,\mathrm{i}\,.$$

VII.2 Propriétés

Globalement, on va conserver toutes les propriétés sauf celles liées à la relation d'ordre et à la borne supérieure absentes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21 : Soient $f,\ g : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$, $c \in [a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Linéarité : $\displaystyle\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$

Relation de Chasles : $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right|_{\mathbb{C}} \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|_{\mathbb{C}}\,\mathrm{d}t.$

Preuve :

Linéarité : On écrit : $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)$ et $g = \mathrm{Re}\,(g) + i\mathrm{Im}\,(g)$, et $\lambda = u + iv$ (avec $u, v \in \mathbb{R}$). La démonstration est alors immédiate, en utilisant la linéarité de l'intégrale des fonctions réelles.

$$\begin{aligned}
\int_{[a;b]} (\lambda f + g) &= \int_{[a;b]} (\lambda\,[\mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)] + [\mathrm{Re}\,g + i\mathrm{Im}\,g]\,) \\
&= \int_{[a;b]} ((\lambda \mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{Re}\,g) + i(\lambda \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,g)) \\
&= \int_{[a;b]} (\lambda \mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{Re}\,g) + i\int_{[a;b]} (\lambda \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,g) \\
&= \lambda \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f) + \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,g + i\left(\lambda \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(f) + \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,g\right) \\
&= \lambda\left(\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f) + i\int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(f)\right) + \left(\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,g + i\int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,g\right) \\
&= \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g
\end{aligned}$$

Relation de Chasles : À nouveau, il suffit d'écrire $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)$ et d'utiliser la relation de Chasles pour les fonctions réelles.

Inégalité triangulaire :

- Si $\displaystyle\int_{[a;b]} f = 0$ alors $\displaystyle\left|\int_{[a;b]} f\right| = 0$ et le résultat est clair par positivité de l'intégrale avec $|f| \geqslant 0$.

- Si $\displaystyle\int_{[a;b]} f \neq 0$ alors on note $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ i.e.

$$\int_{[a;b]} f = \left|\int_{[a;b]} f\right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \iff \left|\int_{[a;b]} f\right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} \int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}.$$

Posons $g = f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$ pour une meilleure visibilité.

Alors $\displaystyle\left|\int_{[a;b]} f\right| = \int_{[a;b]} g = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(g) + \mathrm{i} \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(g)$.

Or, $\displaystyle\left|\int_{[a;b]} f\right| \in \mathbb{R} \implies \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(g) = 0$.

Donc, $\displaystyle\left|\int_{[a;b]} f\right| = \underbrace{\int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(g) = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}) \underset{\mathrm{Re}(z)\leqslant|z|}{\leqslant} \int_{[a;b]} |f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}| = \int_{[a;b]} |f|}_{\text{Intégrale de fonctions à valerus réelles}}$. Il en résulte que :

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|\,.$$

Remarques :

— $\mathbb{C}$ n'étant pas doté d'une relation naturelle d'ordre, on ne retrouve pour les fonctions à valeurs complexes ni la propriété de positivité de l'intégrale, ni la croissance de l'intégrale.

— Les formules de l'intégration par parties, de changement de variable, et la formule de Taylor avec reste intégral se généralisent sans difficulté.

— La formule de Taylor-Lagrange dépendant du théorème de Rolle n'est plus valable mais l'inégalité, comme celle des accroissements finis, subsiste pour les fonctions à valeurs complexes.