Intégration

I Primitives

Exercice 1 : Déterminer les fonctions f continues sur $[0\,;1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Soit f continue sur $[0\,;1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle I donné.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{5}{3x^2}$ sur $\mathrm{I} = [-4\,;-1]$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{3}{5\sqrt{x}}$ sur $\mathrm{I} = [1\,;4]$.
3. $f : x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.
4. $f : x \longmapsto x(3x^2-1)^2$ sur $\mathrm{I} = [-1\,;2]$.
5. $f : x \longmapsto -3x\,\mathrm{e}^{x^2-2}$ sur $\mathrm{I} = [-1\,;3]$.
6. $f : x \longmapsto \dfrac{3x^3}{5\sqrt{x^4+2}}$ sur $\mathrm{I} = [1\,;4]$.
7. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{(8-x^3)^2}$ sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$.

Exercice 4 : Pour $x \in [0\,;1[$, on définit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. En utilisant la concavité du logarithme, démontrer que :

$$\forall x \in \,]0\,;1[\,,\ \forall t \in \,]x^2\,;1]\,,\quad \frac{2\ln(x)}{x^2-1}(t-1) \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$

2. En déduire que f se prolonge par continuité en 1.
3. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;1]$, et calculer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{(t-1)}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 : On considère la fonction F définie sur $\mathrm{J} = \,]1\,;+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}.$$

1. Étudier le sens de variation de F sur J.
2. En utilisant la décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ sur $\mathrm{I} = \,]1\,;+\infty[$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$.
3. En utilisant l'inégalité $0 < \ln(t) \leqslant t-1$ pour $t \in \mathrm{I}$, déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} \mathrm{F}(x)$.

II Suites d'intégrales

Exercice 6 : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{T}_n(x) = \displaystyle\int_0^x \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\mathrm{T}_0(x)$, $\mathrm{T}_1(x)$, $\mathrm{T}_2(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{T}_{n+2}(x)$ et $\mathrm{T}_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$.
3. En déduire $\mathrm{T}_{2p}(x)$ et $\mathrm{T}_{2p+1}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\mathrm{A}_1(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{A}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{A}_n(x)$.
3. En déduire $\mathrm{A}_n(x)$ pour $n = 2, 3, 4$.

Exercice 8 (Intégrales de Wallis) : Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n \in \mathbb{N}_{n_0}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{I}_{n+1}$.
5. Calculer $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1}$.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Exercice 9 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n$.
4. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-2} et I_n pour tout entier $n \geqslant 2$.
5. Démontrer que l'on a :

$$\forall\, p \geqslant 0,\ \mathrm{I}_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{2(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}.$$

Exercice 10 (Lemme de Riemann-Lebesgue) :

1. On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

III Sommes de Riemann

Exercice 11 : Déterminer la limite des suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$

Exercice 12 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 13 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut utiliser le théorème sur les sommes de Riemann.
2. En utilisant les variations de f sur $[0\,;1[$, montrer que :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}},$$

et

$$\forall\, k \in [\![0\,;n-2]\!]\,,\ \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire un encadrement de u_n et conclure.

Exercice 14 : Calculer l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, ..., n$,
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_k = aq^k$, $k = 0, 1, ..., n$ (q étant à déterminer),
3. $h(x) = \alpha^x$ sur $[a,b]$, $\alpha > 0$, et $x_k = a + (b-a).\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$.

Exercice 15 : Déterminer la limite des suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.
3. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2}$.

Exercice 16 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 17 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut utiliser le théorème sur les sommes de Riemann.
2. En utilisant les variations de f sur $[0\,;1[$, montrer que :

$$\forall\, k \in [\![1\,; n-1]\!]\,,\ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}},$$

$$\text{et} \qquad \forall\, k \in [\![0\,; n-2]\!]\,,\ \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire un encadrement de u_n et conclure.