Dimension finie

1 (a) Commençons par calculer :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AJ} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d(\mathrm{A}) & d(\mathrm{A}) & d(\mathrm{A}) \\ d(\mathrm{A}) & d(\mathrm{A}) & d(\mathrm{A}) \\ d(\mathrm{A}) & d(\mathrm{A}) & d(\mathrm{A}) \end{pmatrix} = d(\mathrm{A})\mathrm{J} = \lambda \mathrm{J}
\end{aligned}$$

en posant $\boxed{\lambda = d(\mathrm{A}).}$ On procède exactement de la même façon pour le produit JA (sauf qu'on aura la somme de chaque colonne à chaque fois) :

$$\mathrm{JA} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{13}+a_{23}+a_{33} \end{pmatrix} = d(\mathrm{A})\mathrm{J} = \lambda\mathrm{J}.$$

On a donc $\mathrm{AJ} = \mathrm{JA} = \lambda\mathrm{J}$ donc $\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{G}.}$

(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{G}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{AJ} = \lambda\mathrm{J}$ et $\mathrm{JA} = \lambda\mathrm{J}$.

Grâce aux produits matriciels de la question précédente, l'égalité $\mathrm{AJ} = \lambda\mathrm{J}$ permet d'affirmer que $\forall\, i \in \{1,2,3\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \lambda$ (somme de chaque ligne).

Quant à l'égalité $\mathrm{JA} = \lambda\mathrm{J}$, elle fournit $\forall\, j \in \{1,2,3\},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \lambda$ (somme de chaque colonne). Ainsi, $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ et $d(\mathrm{A}) = \lambda$.

Ceci étant valable pour toute matrice A, on en déduit que $\boxed{\mathcal{G} \subset \mathcal{F}.}$

Dans la question précédente, on a en fait montré que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, d'où par double inclusion : $\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{G}.}$

2 Appliquons le critère du sous-espace vectoriel :

(i) $\mathcal{G} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par définition ;

(ii) $0 \in \mathcal{G}$ (0 désignant la matrice nulle) car avec $\lambda = 0$ on a bien $0\mathrm{J} = \lambda\mathrm{J}$ et $\mathrm{J}0 = \lambda\mathrm{J}$;

(iii) soient $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{G}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\mathrm{C} = \alpha\mathrm{A} + \mu\mathrm{B} \in \mathcal{G}$. Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{AJ} = \mathrm{JA} = \lambda\mathrm{A}$ et $\mathrm{BJ} = \mathrm{JB} = \mu\mathrm{B}$. Ainsi,

$$\mathrm{CJ} = (\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})\mathrm{J} = \alpha\mathrm{AJ} + \beta\mathrm{BJ} = \alpha\lambda\mathrm{J} + \beta\mu\mathrm{J} = \gamma\mathrm{J},$$

en posant $\gamma = \alpha\lambda + \beta\mu \in \mathbb{R}$. De même,

$$\mathrm{JC} = \mathrm{J}(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{JA} + \beta\mathrm{JB} = \alpha\lambda\mathrm{J} + \beta\mu\mathrm{J} = \gamma\mathrm{J},$$

ce qui montre finalement que $\mathrm{C} \in \mathcal{G}$.

$\boxed{\mathcal{G} \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

3 À la question précédente, on a même montré que $\gamma = d(\mathrm{C}) = d(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}) = \alpha\lambda+\beta\mu = \alpha d(\mathrm{A})+\beta d(\mathrm{B})$ *i.e.* $d \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

4 (a) Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{AJ} = \lambda\mathrm{J}$. Or, on sait que $\lambda = d(\mathrm{A})$ (cf. (1a)) d'où $\mathrm{AJ} = d(\mathrm{A})\mathrm{J}$.

Supposons que $d(\mathrm{A}) = 0$ (par l'absurde), ce qui donne $\mathrm{AJ} = 0$.

En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $\mathrm{J} = 0$ ce qui est absurde donc $\boxed{d(\mathrm{A}) \neq 0.}$

(b) En multipliant par A^{-1} (à gauche) dans l'égalité $\mathrm{AJ} = d(\mathrm{A})\mathrm{J}$, on a $\mathrm{J} = d(\mathrm{A})\mathrm{A}^{-1}\mathrm{J}$ d'où $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{J} = \dfrac{1}{d(\mathrm{A})}\mathrm{J} = \mu\mathrm{J}$ en posant $\mu = \dfrac{1}{d(\mathrm{A})}$.

De même, en partant de l'égalité $\mathrm{JA} = d(\mathrm{A})\mathrm{J}$ que l'on multiplie par A^{-1} (à droite), on obtient $\mathrm{JA}^{-1} = \mu\mathrm{J}$.

On a montré que $\boxed{\mathrm{A}^{-1} \in \mathcal{G}}$ et $\boxed{d(\mathrm{A}^{-1}) = \mu = \dfrac{1}{d(\mathrm{A})}.}$

5 Par définition, (J) est une famille génératrice de $\mathcal{H}_2$.

Comme $\mathrm{J} \neq 0$, elle forme une famille libre donc $\boxed{(\mathrm{J}) \text{ est une base de } \mathcal{H}_2}$ et $\boxed{\dim \mathcal{H}_2 = 1.}$

6 Appliquons le critère du sous-espace vectoriel :

(i) $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{G}$ par définition ;

(ii) $0 \in \mathcal{H}_1$ (matrice nulle) car $d(0) = 0$ (la somme des colonnes et des lignes de 0 vaut 0) ;

(iii) soient $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathcal{H}_1)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\mathrm{C} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} \in \mathcal{H}_1$:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{C}) = d(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}) &= \alpha d(\mathrm{A}) + \beta d(\mathrm{B}) && \text{(par linéarité de } d\text{)} \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 && \text{(car } d(\mathrm{A}) = d(\mathrm{B}) = 0 \text{ vu que } \mathrm{A} \in \mathcal{H}_1 \text{ et } \mathrm{B} \in \mathcal{H}_1\text{).} \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{C} \in \mathcal{H}_1$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{H}_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{G}.}$

7 On sait que

$$\mathcal{G} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{G},\quad \exists!\,(\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2,\quad \mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2.$$

Soit donc $\mathrm{A} \in \mathcal{G}$ quelconque. Si $\mathrm{A}_2 \in \mathcal{H}_2$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A}_2 = \lambda\mathrm{J}$ (par définition de $\mathcal{H}_2$). Posons $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} - \mathrm{A}_2 = \mathrm{A} - \lambda\mathrm{J}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 \in \mathcal{H}_1 &\iff d(\mathrm{A}_1) = 0 \iff d(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{J}) = 0 \iff d(\mathrm{A}) - \lambda d(\mathrm{J}) = 0 && \text{(toujours par linéarité de } d\text{)} \\ &\iff \lambda = \frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{J})} = \frac{d(\mathrm{A})}{3} && \text{(car } d(\mathrm{J}) = 3\text{).} \end{aligned}$$

Il existe une unique solution λ pour laquelle $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{H}_1$ *i.e.* $\boxed{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{G}.}$

8 Tout d'abord, il est clair que ces quatre matrices appartiennent à $\mathcal{H}_1$ car la somme de chaque ligne et de chaque colonne est nulle.

Cette famille possédant **4** vecteurs de $\mathcal{H}_1$, qui est de dimension **4**, il suffit de montrer qu'elle est libre et ce sera automatiquement une base de $\mathcal{H}_1$.

Si a, b, c, d sont des réels, on a :

$$\begin{aligned} a\mathrm{A}_{33} + b\mathrm{A}_{32} + c\mathrm{A}_{23} + d\mathrm{A}_{22} = 0 &\iff \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & -b \\ -b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a+b+c+d & -a-c & -b-d \\ -a-b & a & b \\ -c-d & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = c = d = 0. \end{aligned}$$

Donc $(A_{33}, A_{32}, A_{23}, A_{22})$ est libre et c'est finalement $\boxed{\text{une base de } \mathcal{H}_1.}$

9 On sait que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{G}$. Sachant que $(A_{33}, A_{32}, A_{23}, A_{22})$ est une base de $\mathcal{H}_1$ et (J) une base de $\mathcal{H}_2$, alors le critère des bases adaptées pour des espaces supplémentaires permet d'affirmer que la concaténation de ces deux bases fournit une base de $\mathcal{G}$, en d'autres termes :

$$\boxed{(A_{33}, A_{32}, A_{23}, A_{22}, J) \text{ est une base de } \mathcal{G} \text{ (qui est donc de dimension 5).}}$$