Dimension finie

Dans cet exercice, on se place dans l'espace $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 3×3.

On note I_3 la matrice identité et J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ constitué des matrices A telles que la somme des coefficients de chaque ligne et la somme des coefficients de chaque colonne sont égales à une même constante. On appelle $d(A)$ cette constante.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$ et $d(M) = 6$ car la somme des coefficients de chaque ligne vaut 6 et de même avec les colonnes.

Enfin, on introduit l'ensemble $\mathcal{G} = \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ AJ = \lambda J \text{ et } JA = \lambda J\}$.

1. (a) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{F}$. Démontrer que $A \in \mathcal{G}$ en précisant ce que vaut le réel λ correspondant.
   (b) Montrer que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Qu'en déduit-on sur les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$?
2. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $d \in \mathscr{L}(\mathcal{G})$.
4. Soit $A \in \mathcal{G}$ que l'on suppose inversible.
   (a) Montrer que $d(A) \neq 0$. *On pourra raisonner par l'absurde.*
   (b) En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{G}$ puis comparer $d(A^{-1})$ et $d(A)$.

On définit à présent $\mathcal{H}_1 = \{A \in \mathcal{G} \mid d(A) = 0\}$ et $\mathcal{H}_2 = \text{vect}\,(J)$.

5. Préciser une base de $\mathcal{H}_2$ ainsi que sa dimension.
6. Montrer que $\mathcal{H}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$.
7. Démontrer que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{G}$.

Ci-après, on ***admet*** *que* $\dim \mathcal{H}_1 = 4$. *Ce résultat provient de la résolution du système issu de l'équation* $d(A) = 0$ *définissant* $\mathcal{H}_1$ *(6 équations, 9 inconnues…). Les plus courageux s'y essayeront, mais se garderont de rendre leur production.*

On définit les matrices :

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Montrer que $(A_{33}, A_{32}, A_{23}, A_{22})$ est une base de $\mathcal{H}_1$.
9. En déduire une base de $\mathcal{G}$ en justifiant soigneusement.