Suites et dénombrements

Exercice 1 :

1. Il s'agit du nombre de sextuplets (liste de 6 mots) d'éléments de l'ensemble des mots possibles (de cardinal 9), soit $\boxed{9^6 \text{ phrases}}$ au total.

   Remarque : L'ordre des mots dans la phrase compte, donc aucun coefficient binomial n'intervient ici.

2. (a) Il s'agit du nombre de sextuplets d'éléments **distincts** de l'ensemble des mots possibles, soit $\boxed{\dfrac{9!}{(9-6)!} = \dfrac{9!}{3!}}$ ou encore $\boxed{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60\ 480.}$

   (b) Une phrase de six mots contenant exactement cinq mots différents possède un unique mot en double. Il y a 9 choix possibles pour ce mot en double, que l'on doit ensuite placer dans la phrase, ce qui donne $\dbinom{6}{2}$ possibilités (choix de 2 emplacements dans la phrase, parmi les 6 possibles, et l'ordre ne compte pas car c'est le même mot).

   Ceci fait, il reste à former une liste de 4 mots distincts (c'est-à-dire un quadruplet d'éléments distincts) dans l'ensemble des mots restants qui est de cardinal 8, soit $\dfrac{8!}{(8-4)!} = \dfrac{8!}{4!}$.

   Bilan : il y a $\boxed{9 \times \dbinom{6}{2} \times \dfrac{8!}{4!} = 9 \times \dfrac{6 \times 5}{2} \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 226\ 800}$ phrases contenant exactement cinq mots différents.

   Variante. On choisit les 5 mots qui constituent la phrase, donc $\dbinom{9}{5}$ choix possibles. Parmi ces 5 mots, on en choisit un seul qui sera répété, donc 5 choix possibles. Il reste à placer les 2 mots identiques, donc $\dbinom{6}{2}$ possibilités, puis à placer les 4 mots différents restants, soit 4! possibilités (permutation des 4 mots restants sur les 4 emplacements restants). En tout, on obtient :

   $$\binom{9}{5} \times 5 \times \binom{6}{2} \times 4! = 226\ 800.$$

   (c) Il s'agit du nombre de phrases contenant exactement cinq mots différents plus le nombre de phrases contenant exactement six mots différents. D'après les deux questions précédentes, on obtient :

   $$\boxed{9 \times \binom{6}{2} \times \frac{8!}{4!} + \frac{9!}{3!} = 287\ 280.}$$

3. (a) On commence par choisir les p places occupées par le mot « malotru » parmi les 6 emplacements possibles, soit $\dbinom{6}{p}$ (l'ordre n'importe pas car il s'agit du même mot). Ensuite, il reste à former une liste de $6-p$ mots (c'est-à-dire un $(6-p)$-uplet) de la vie courante, qui sont au nombre de 3, soit 3^{6-p} possibilités (l'ordre importe et les répétitions sont possibles).

Finalement, on obtient $\boxed{\binom{6}{p}3^{6-p}}$ phrases possibles.

(b) Comptons de deux façons différentes le nombre de phrases que l'on peut faire avec le mot « malotru » et les trois mots de la vie courante. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des phrases possibles.

Première façon. Il s'agit du nombre de quadruplets d'éléments de l'ensemble des mots possibles (il y en a 4 ici), donc $|\mathcal{A}| = 4^6$.

Deuxième façon. Dans une telle phrase de 6 mots, distinguons le nombre de fois qu'apparaît « malotru » : soit il n'apparaît pas, soit il n'apparaît qu'une fois, soit deux fois etc. jusqu'à apparaître les six fois. On est donc en train d'écrire $\mathcal{A}$ en une union disjointe $\mathcal{A} = \bigcup_{p=0}^{6} \mathcal{A}_p$ où $\mathcal{A}_p$ est l'ensemble des phrases contenant exactement p fois le mot « malotru ».

D'après la question précédente, $|\mathcal{A}_p| = \binom{6}{p}3^{6-p}$. Comme l'union est disjointe :

$$\boxed{4^6} = |\mathrm{A}| = \sum_{p=0}^{6} |\mathcal{A}_p| \boxed{= \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 3^{6-p}.}$$

Exercice 2 :

1. Continue et strictement monotone sur $[0\,;+\infty[$, la fonction $f : x \longmapsto e^x - x$ établit une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur son image $[1\,;+\infty[$.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe donc un unique réel $x_n \in [0\,;+\infty[$ tel que $e^{x_n} - x_n = n$.

2. (a) Par définition de x_n, $n = e^{x_n} - x_n \leqslant e^{x_n}$ car $x_n \geqslant 0$.

   En passant au logarithme, nous avons $\ln(n) \leqslant x_n$.

   Par le théorème de divergence par minoration, (x_n) tend vers $+\infty$.

   (b) Comme $e^{x_n} - x_n = n$ alors $1 - \dfrac{x_n}{e^{x_n}} = \dfrac{n}{e^{x_n}} > 0$ d'où

$$\ln\left(1 - \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) = \ln\left(\frac{n}{e^{x_n}}\right) = \ln(n) - \ln\left(e^{x_n}\right) = \ln(n) - x_n.$$

   Comme (x_n) tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \dfrac{\mathrm{X}}{e^{\mathrm{X}}} = 0$ par croissance comparée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{e^{x_n}} = 0$ et $\dfrac{x_n}{e^{x_n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$.

   On en déduit

$$\ln(n) - x_n = \ln\left(1 - \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x_n}{e^{x_n}} \implies \frac{\ln(n)}{x_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{e^{x_n}}.$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{e^{x_n}} = 0$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{x_n} = 1$ *i.e.* $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. (a) D'après précédemment $v_n = x_n - \ln(n) = \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x_n}{e^{x_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   Par définition de x_n, $\forall\, n \geqslant 1$, $e^{x_n} - x_n = n$. Comme $x_n = \ln(n) + v_n$, en remplaçant nous en déduisons :

$$ne^{v_n} - \ln(n) - v_n = n \iff e^{v_n} - 1 = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{v_n}{n}. \qquad (n \geqslant 1)$$

(b) Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(1)$, on a :

$$e^{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad \frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

On en déduit $\dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Par transitivité, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

De l'expression de v_n, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ x_n - \ln(n) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ x_n &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right). \end{aligned}$$