Espaces vectoriels

Exercice 1 : Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$, on appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut.

Soient A et B les points de coordonnées $(0,0)$ et (n,p).

1. Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de A à B.
2. On appelle chemin strictement croissant reliant A à B les chemins tels qu'on ne fait jamais deux pas consécutifs vers la droite.

   Combien y a-t-il de tels chemins ?

Exercice 2 (Polynômes de Legendre) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble E_n des polynômes à coefficients réels de degré n au plus.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \begin{array}{rcl} \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + 2\mathrm{X}\mathrm{P}' - k(k+1)\mathrm{P} \end{array}$$

1. (a) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   (b) Montrer que f_n est un endomorphisme de E_n.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X}^2-1)^k$ et $\mathrm{L}_k = \mathrm{P}_k^{(k)}$.

   (a) Déterminer le degré de L_k.

   (b) En remarquant que $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$ et en utilisant la formule de Leibniz, déterminer $\mathrm{L}_n(1)$ et $\mathrm{L}_n(-1)$.

   (c) Montrer que $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n$ vérifie : $(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}' - 2n\mathrm{X}\mathrm{P} = 0$.

   En déduire que $\mathrm{L}_n \in \ker f_n$.

Exercice 3 : Soient E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g,\ h \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$.

Montrer que $\ker(g\circ f) = \ker(h \circ f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(h)$.