Espaces vectoriels

Exercice 1 :

1. En convenant de noter D un déplacement vers la droite et H un déplacement vers le haut, un tel chemin peut être décrit par un mot de $n+p$ lettres comportant n fois la lettre D (et p fois la lettre H).

$$\text{Donc } \binom{n+p}{n} \text{ chemins croissants de } (0,0) \text{ à } (n,p).$$

2. Si $n > p+1$, c'est impossible.

Si $n \leqslant p+1$, deux méthodes pour compter ces chemins strictement croissants :

— Deux D ne peuvent pas être consécutifs. Un D est nécessairement suivi d'un H, sauf s'il est en dernière position.

(a) Si le mot ne se termine pas par D, chaque D est suivi d'un H. On a donc n groupes de deux lettres DH. Il reste $p-n$ lettres H à placer. On doit écrire un mot constitué de $p-n$ lettres H et n blocs de DH. C'est au final un mot de p emplacements, et il reste à choisir l'endroit où on met les blocs : $\binom{p}{n}$ possibilités.

(b) Si le mot se termine par D, idem, sauf qu'il y a $n-1$ blocs DH. Il reste $p-(n-1)$ lettres H à placer, soit un mot de p emplacements à nouveau (sans compter le dernier D). $\binom{p}{n-1}$ possibilités.

$$\text{Au total, on a : } \binom{p}{n} + \binom{p}{n-1} = \binom{p+1}{n} \text{ chemins strictement croissants.}$$

— On peut commencer par placer les p lettres H. Comme deux D ne peuvent être consécutifs, ils doivent être placés entre ces H, ou avant ou après. $p+1$ emplacements au final.

$$\text{On retrouve les : } \binom{p+1}{n} \text{ chemins strictement croissants.}$$

Exercice 2 (Polynômes de Legendre) :

1. (a) Toute combinaison linéaire de polynômes de degré au plus n est un polynôme donc E_n, non vide, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

(b) Deux choses à montrer :

i. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$, alors $\deg f_n(\mathrm{P}) \leqslant \max\left(2 + \deg \mathrm{P} - 2\,;1 + \deg \mathrm{P} - 1\,; \deg \mathrm{P}\right) \leqslant n$.

Donc $f_n(\mathrm{P}) \in \mathrm{E}_n$ qui est stable par f_n.

ii. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q deux polynômes de degré au plus n.

Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} f_n(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}) &= (\mathrm{X}^2-1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})'' + 2\mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' - k(k+1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \\ &= \lambda\Big((\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + 2\mathrm{X}\mathrm{P}' - k(k+1)\mathrm{P}\Big) + (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{Q}'' + 2\mathrm{X}\mathrm{Q}' - k(k+1)\mathrm{Q} \\ &= \lambda f_n(\mathrm{P}) + f_n(\mathrm{Q}). \end{aligned}$$

L'application f_n est donc linéaire.

En conclusion, $f_n \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_n)$.

2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X}^2-1)^k$ et $\mathrm{L}_k = \mathrm{P}_k^{(k)}$.

a Comme $\deg \mathrm{P}_k = 2k$ alors $\deg \mathrm{L}_k = 2k - k = k$.

b Appliquons la formule de Leibniz au produit $(\mathrm{X}-1)^n \times (\mathrm{X}+1)^n$:

$$\mathrm{L}_n = \mathrm{P}_n^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Big((\mathrm{X}-1)^n\Big)^{(j)} \Big((\mathrm{X}+1)^n\Big)^{(n-j)}$$

Comme $\Big((\mathrm{X}-1)^n\Big)^{(j)}(1) \neq 0 \iff j = n$, on a :

$$\mathrm{L}_n(1) = \Big((\mathrm{X}+1)^n\Big)^{(0)} = 2^n n!.$$

De même, $\Big((\mathrm{X}+1)^n\Big)^{(n-j)}(-1) \neq 0 \iff j = 0$, d'où

$$\mathrm{L}_n(-1) = \Big((\mathrm{X}-1)^n\Big)^{(0)} = (-2)^n n!.$$

c Il suffit de calculer avec $\mathrm{P}_n' = 2n\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)^{n-1}$.

Donc,

$$(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' = 2n\mathrm{X}\mathrm{P}_n \qquad \text{(XXII.1)}$$

À l'aide de la formule de Leibniz, dérivons la relation (XXII.1), $n+1$ fois :

Comme $(\mathrm{X}^2-1)^{(i)} = 0$ pour tout $i > 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big((\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n'\Big)^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (\mathrm{X}^2-1)^{(i)}\mathrm{P}_n^{(n+1-i+1)} \\
&= \binom{n+1}{0} (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \binom{n+1}{1} (2\mathrm{X})\mathrm{P}_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{2} (2)\mathrm{P}_n^{(n)} \\
&= (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + 2(n+1)\mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} + n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

De la même manière pour le second membre :

$$\begin{aligned}
\Big(2n\mathrm{X}\mathrm{P}_n\Big)^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (2\mathrm{X})^{(i)}\mathrm{P}_n^{(n+1-i)} \\
&= (2n\mathrm{X})\mathrm{P}_n^{(n+1)} + 2n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à égaliser les deux relations précédentes :

$$\begin{gathered}
(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \cancel{2(n+1)}\,\mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} + \cancel{n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}} = \cancel{(2n\mathrm{X})\mathrm{P}_n^{(n+1)}} + \cancel{2}n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)} \\
(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} = n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}.
\end{gathered}$$

Enfin, $0 = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} - n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)} = f_n(\mathrm{L}_n)$ et $\mathrm{L}_n \in \ker f_n$.

Un peu d'histoire : *En mathématiques et en physique théorique, les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux.*

Ce sont des solutions polynomiales $\mathrm{P}_n(x)$, sur l'intervalle $x \in [-1\,;1]$, de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_n(x)\right] + n(n+1)\,\mathrm{P}_n(x) = 0,$$

dans le cas particulier où le paramètre n est un entier naturel.

Exercice 3 : On raisonne par double implication :

- Supposons que $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(g) = \operatorname{Im}(f) \cap \ker(h)$ et soit $x \in \ker(g \circ f)$

  Alors, $f(x) \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(g) = \operatorname{Im}(f) \cap \ker(h)$

  Donc $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 0$ et $x \in \ker(h \circ f)$ *i.e.* $\ker(g \circ f) \subset \ker(h \circ f)$

  Par symétrie, on a l'égalité.
- Réciproquement, supposons $\ker(g \circ f) = \ker(h \circ f)$ et soit $y \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(g)$.

  Alors, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$ et $0 = g(y) = g(f(x)) \implies x \in \ker(g \circ f) = \ker(h \circ f)$.

  D'où $h(y) = h(f(x)) = 0$ et $y \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(h)$ *i.e.* $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(g) \subset \operatorname{Im}(f) \cap \ker(h)$.

  Par symétrie, on a l'égalité.

En conclusion, $\ker(g \circ f) = \ker(h \circ f) \iff \operatorname{Im}(f) \cap \ker(g) = \operatorname{Im}(f) \cap \ker(h)$.