Fichiers AlgLin-DimFinie a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère :

— $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = 0\}$;
— $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

- F et G sont des sev.
- $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ immédiat.
- On a $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

  Soit $\phi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f : x \mapsto \phi(x) - \phi(1)x$ et $g : x \mapsto \phi(1)x$.

  On a bien $f \in \mathrm{F}$, $g \in \mathrm{G}$ et $\phi = f + g$. Donc $f \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On considère :

— $\mathrm{F} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;
— $\mathrm{G} = \{(u+v, u+v, u), u, v \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

- F et G sont des sev.
- On a $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

  Soit $(x, y, z)\mathbb{R}^3$. On cherche $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ tels que $(x, y, z) = f + g$.

  Comme $f \in \mathrm{F}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$.

  Comme $g \in \mathrm{G}$, il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tel que $f = (u+v, u+v, u)$.

  $$(x, y, z) = f + g \iff \begin{cases} \alpha + u + v = x \\ 2\alpha + u + v = y \\ 3\alpha + u = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -x + y \\ u = 3x - 3y + z \\ v = -x + 2y - z \end{cases}.$$

  (x, y, z) est donc décomposable de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G.
  On en déduit que F et G sont en somme directe, et que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Exercice 3 : Soient $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2z + 3t = 0\}$.
Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et F, G deux sev de E.

On considère H un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans G.

Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

Exercice 5 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$.

On considère $u = (-12, -2, 5)$, $v = (2, -1, 4)$, $w = (5, 0, 1)$.

1. L'un des vecteurs est-il combinaison linéaire des autres ?

2. Définir vect (u) et vect (v, w).
3. Montrer que vect $(u) \oplus$ vect $(v, w) = \mathrm{E}$.

Exercice 6 : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question avec $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$.

Exercice 7 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 8 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Correction : *Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.*

1. *Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0,0,0)$*

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

2. *Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.*

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\
\iff & \begin{cases} b+c=x \\ a+c=y & (\mathrm{L}_2) \\ a+b=z & (\mathrm{L}_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x & (\mathrm{L}_1') \\ a+c=y \\ b-c=z-y & (\mathrm{L}_3') = (\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2b = x+z-y & (\mathrm{L}_1' + \mathrm{L}_3') \\ a+c=y \\ 2c = x-(z-y) & (\mathrm{L}_1' - \mathrm{L}_3') \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x,y,z) = v$. Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice.

3. La famille est libre et génératrice donc c'est une base.
4. Pour écrire $w = (1,1,1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x, y, z), en particulier pour le vecteur $(1,1,1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3) sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 9 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ et $w = (1,2,-3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Correction : Notons $\mathcal{B}$ la base (v_1, v_2, v_3).

Exprimons ensuite e_1 dans cette base, les calculs donnent : $e_1 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$e_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

$e_3 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3$. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Les calculs sont ensuite terminés, on remarque que $w = (1,2,-3)$ vaut en fait $w = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ donc par nos calculs précédents $w = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + 2(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3) - 3(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3) = 2v_2 + 3v_3$. Les coordonnées de w dans $\mathcal{B}$ sont $(0,2,3)$.

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

Donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Correction : Par exemple la famille $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.

La famille $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Exercice 11 : Vrai ou faux ?

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Correction :

1. Faux. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$, $z = (1,1,0)$.
2. Vrai. Soit une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_p x_p = 0$. Supposons qu'un des coefficient est non nul : par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on écrit $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}x_p$. Donc x_1 est une combinaison linéaire de $\{x_2, \dots, x_p\}$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé, donc tous les coefficients sont nuls. Donc $\{x_1, \dots, x_p\}$ est une famille libre.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.

On considère C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B. Montrer que $A + B = A \oplus C$.

Exercice 2 : On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Soient $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = 0_2\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), BM = 0_2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

   Sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 3 : Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - 2y + z - t = 0\}$.

On considère $G = \text{vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (3, 0, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 4, -1, -1)$.

1. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim (F \cap G)$, $\dim (F + G)$.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos x$.

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 5 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E, P(1) = P'(2) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(2) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels
2. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 6 :

1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$ (pour $i = 0, 1, \dots, n$) forme une base de E.
2. Écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ puis sous la forme $F = \alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X + X^2) + \delta(1 + X + X^2 + X^3)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.

Correction :

1. Tout d'abord la famille $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ contient $n + 1$ vecteurs dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n + 1$. Ici un vecteur est un polynôme : P_0 est un polynôme constant non nul, P_1 est un polynôme de degré exactement 1,... Rappelons que lorsque le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre être une famille libre et être une famille génératrice et donc aussi être une base.

   Nous allons donc montrer que $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une famille libre. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0.$$

Introduisons l'hypothèse concernant les degrés : $\deg P_0 = 0$, $\deg P_1 = 1$, ..., $\deg P_n = n$. Définissons le polynôme $P(X) = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$.

Nous allons montrer successivement $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$,..., $\lambda_0 = 0$.

Par l'absurde supposons $\lambda_n \neq 0$ et écrivons $P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, comme $\deg P_n(X) = n$ alors $a_n \neq 0$. Maintenant $P(X)$ est aussi un polynôme de degré exactement n qui s'écrit

$$P(X) = \lambda_n \cdot a_n \cdot X^n + \text{termes de plus bas degré}$$

La combinaison linéaire nulle implique que $P(X) = 0$ (le polynôme nul). Donc en identifiant les coefficients devant X^n on obtient $\lambda_n \cdot a_n = 0$ On obtient $a_n = 0$ ou $\lambda_n = 0$. Ce qui est une contradiction. Conclusion $\lambda_n = 0$.

Maintenant la combinaison linéaire nulle s'écrit $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n-1}P_{n-1} = 0$. Par récurrence descendante on trouve $\lambda_{n-1} = 0$, ..., jusqu'à $\lambda_0 = 0$.

Bilan : $\lambda_0 = 0$, ..., $\lambda_n = 0$ donc la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est libre, elle donc aussi génératrice ; ainsi $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Un point que nous avons utilisé et qu'il est peut-être utile de détailler est le suivant : si un polynôme égal le polynôme nul alors tous ces coefficients sont nul.

Voici une justification : écrivons $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ et divisons par X^n :

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{X} + \frac{a_{n-2}}{X^2} + \cdots + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n} = 0$$

Lorsque l'on fait tendre X vers $+\infty$ alors le terme de gauche tend vers a_n et celui de droite vaut 0 donc par unicité de la limite $a_n = 0$. On fait ensuite une récurrence descendante pour prouver $a_{n-1} = 0$,..., $a_0 = 0$.

Une conséquence est que si deux polynômes sont égaux alors leurs coefficients sont égaux. Et une autre formulation est de dire que $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.

Exercice 7 : Soit $E = \{(x+y-2z,\ y+5z,\ 3x+y+z,\ x+y+z),\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. En donner une base.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Projection et symétrie dans K^3

Dans K^3, on donne les sous espaces : $\begin{cases} H = \{\overrightarrow{X} = (x,y,z) \text{ tq } x+y+z = 0\} \\ K = \text{vect}(\overrightarrow{U} = (1,1,2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2. Démontrer que $H \oplus K = K^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_H et s_H.

Correction :

3 π_{H} :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x' & = & 3x & - & y & - & z \\ 4y' & = & -x & + & 3y & - & z \\ 4z' & = & -2x & - & 2y & + & 2z, \end{array}\right.$$

s_{H} :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x' & = & x & - & y & - & z \\ 2y' & = & -x & + & y & - & z \\ 2z' & = & -2x & - & 2y. & & \end{array}\right.$$

Exercice 2 : ** Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $a_0,\dots,\ a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et $b_0,\dots,\ b_n$ $n+1$ nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall\,(i,j) \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{L}_i(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{C}_n[\mathrm{X}]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Correction :

1. **Unicité.** Soit $i \in [\![0\,;n]\!]$. L_i doit admettre les n racines deux à deux distinctes a_j où j est différent de i et donc L_i est divisible par le polynôme $\prod\limits_{j\neq i}(\mathrm{X}-a_j)$. L_i doit être de degré n et donc il existe un réel non nul λ tel que $\mathrm{L}_i = \lambda\prod\limits_{j\neq i}(\mathrm{X}-a_j)$. Enfin $\mathrm{L}_i(a_i) = 1$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$. Ainsi nécessairement $\mathrm{L}_i = \prod\limits_{j\neq i}\dfrac{\mathrm{X}-a_j}{a_i-a_j}$.

   Existence. Les L_i ainsi définis conviennent.

$$\boxed{\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \mathrm{L}_i = \prod_{j\neq i}\frac{\mathrm{X}-a_j}{a_i-a_j}.}$$

2. Montrons que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

   Soient $\lambda_0,\dots,\ \lambda_n$ $n+1$ nombres complexes tels que $\lambda_0\mathrm{L}_0+\dots+\lambda_n\mathrm{L}_n = 0$. En particulier, pour un indice i de $[\![0\,;n]\!]$ donné, $\sum\limits_{j=0}^{n}\lambda_j\mathrm{L}_j(a_i) = 0$ et donc $\lambda_i = 0$ au vu des égalités définissant les L_j. La famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

   De plus les L_i sont tous dans $\mathscr{C}_n[\mathrm{X}]$ et vérifient $\mathrm{card}(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n} = n+1 = \dim\mathscr{C}_n[\mathrm{X}] < +\infty$. Donc la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{C}_n[\mathrm{X}]$.
3. Soit P un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n.

   On écrit P dans la base $(\mathrm{L}_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$: $\mathrm{P} = \sum\limits_{j=0}^{n}\lambda_j\mathrm{L}_j$. En prenant la valeur en a_i, i donné dans $[\![0\,;n]\!]$, on obtient $\lambda_i = \mathrm{P}(a_i)$. D'où l'écriture générale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

$$\boxed{\forall\,\mathrm{P} \in \mathscr{C}_n[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} = \mathrm{P}(a_0)\mathrm{L}_0+\dots+\mathrm{P}(a_n)\mathrm{L}_n.}$$

Mais alors : $(\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \mathrm{P}(a_i) = b_i) \Rightarrow \mathrm{P} = b_0\mathrm{L}_0 + \ldots + b_n\mathrm{L}_n$.
Réciproquement le polynôme $\mathrm{P} = b_0\mathrm{L}_0 + \ldots + b_n\mathrm{L}_n$ vérifie bien sûr les égalités demandées et est de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(a_i) = b_i$ à savoir $\mathrm{P}_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i\mathrm{L}_i$.
Soient $\mathrm{P} \in \mathscr{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{R} = (\mathrm{X} - a_0)\ldots(\mathrm{X} - a_n)$ $(\deg(\mathrm{R}) = n + 1)$.

$$\begin{aligned}(\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\ \mathrm{P}(a_i) = b_i) &\Leftrightarrow (\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\ \mathrm{P}(a_i) = \mathrm{P}_0(a_i))\\ &\Leftrightarrow \mathrm{P} - \mathrm{P}_0 \text{ admet les } n+1 \text{ racines deux à deux distinctes } a_0, \ldots, a_n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{P} - \mathrm{P}_0 \text{ est divisible par } \mathrm{R} \Leftrightarrow \exists \mathrm{Q} \in \mathscr{C}[\mathrm{X}] /\ \mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + \mathrm{QR}.\end{aligned}$$

Les polynômes cherchés sont les $\mathrm{P}_0 + \mathrm{QR}$ où Q décrit $\mathscr{C}[\mathrm{X}]$.

Exercice 3 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques i.e. l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n$.
Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = (1, 0, -1, 1),\quad v_2 = (2, 1, 0, 1),\quad v_3 = (1, 1, 1, 0),\quad v_4 = (3, 1, -1, 2).$$

Soit $\mathrm{V} = \mathrm{V}ect(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
De plus, soit

$$\mathrm{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \quad -3x + y + 2z - t = 0\}.$$

1. Montrer que $\dim \mathrm{V} = 2$. Le système (v_1, v_2, v_3, v_4) est-il libre ? Est-il générateur de $\mathbb{R}^4$?
2. Donner une base de V, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer des équations cartésiennes pour V.
4. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
5. Trouver une représentation paramétrique de H, et en déduire une base de H. Que vaut $\dim \mathrm{H}$?
6. Montrer que $v_3 \in \mathrm{H}$ et que $v_1 \notin \mathrm{H}$. En déduire $\dim(\mathrm{V} \cap \mathrm{H})$ et $\dim(\mathrm{V} + \mathrm{H})$.
7. Donner une base de $\mathrm{V} \cap \mathrm{H}$.

Correction :

1. On observe que $v_3 = v_2 - v_1$ et que $v_4 = v_1 + v_2$ donc $\mathrm{V} = \mathrm{V}ect(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{V}ect(v_1, v_2)$. Comme de plus v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, (v_1, v_2) est une base de V. Donc $\dim(\mathrm{V}) = 2$. Le système n'est pas libre car par exemple $v_3 = v_2 - v_1$ est une relation de dépendance linéaire non triviale. Le système n'est pas générateur de $\mathbb{R}^4$ car $\dim(\mathrm{V}) = 2 < 4$ donc $\mathrm{V}ect(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{V} \neq \mathbb{R}^4$.
2. Comme nous l'avons vu dans la question 1, (v_1, v_2) est une base de V. On échelonne la matrice dont les lignes sont les vecteurs v_1 et v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Maintenant on voit que l'on peut compléter la base (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ en ajoutant les vecteurs $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$ car la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 4.

3 $\mathrm{V} = \mathrm{V}ect(v_1, v_2)$. Maintenant soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. $(x,y,z,t) \in \mathrm{V}$ si et seulement si $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y,z,t) = \lambda v_1 + \mu v_2$. Il nous suffit donc de voir pour quelles valeurs de (x,y,z,t) ce système d'équations a une solution. Le système s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z+x \\ 0 & -1 & t-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+x-2y \\ 0 & 0 & t-x+y \end{array}\right)$$

Le système a donc une solution si et seulement si $z+x-2y=0$ et $t-x+y=0$,ce sont des équations cartesiennes pour V, c'est à dire que

$$\mathrm{V} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \ x-2y+z=0 \quad et \quad -x+y+t=0\}.$$

4 H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car c'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire et homogène.

5

$$\begin{aligned} \mathrm{H} &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \ -3x+y+2z-t=0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \ y = 3x-2z+t\} \\ &= \{(x, 3x-2z+t, z, t) \ / \ \ x,z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,3,0,0) + z(0,-2,1,0) + t(0,1,0,1) \ / \ \ x,z,t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{H} = \mathrm{V}ect((1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,1,0,1))$. De plus le système $((1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,1,0,1))$ est une base de H car

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Et donc $\dim(\mathrm{H}) = 3$.

6 $v_3 \in \mathrm{H}$ car $-3\times 1 + 1\times 1 + 2\times 1 - 1\times 0 = 0$. Mais $v_1 \notin \mathrm{H}$ car $-3\times 1 + 1\times 0 + 2\times -1 - 1\times 1 = -6 \neq 0$.

Comme $v_3 \in \mathrm{V}$ et que l'on vient de voir que $v_3 \in \mathrm{H}$, on en déduit que $v_3 \in \mathrm{V}\cap\mathrm{H}$ et donc que $\mathrm{V}ect(v_3) \subseteq \mathrm{V}\cap\mathrm{H}$. On a donc obtenu que $\dim(\mathrm{V}\cap\mathrm{H}) \geqslant 1$. Comme de plus $\mathrm{V}\cap\mathrm{H} \subseteq \mathrm{V}$ on sait que $\dim(\mathrm{V}\cap\mathrm{H}) \leqslant 2$. Maintenant si on avait $\dim(\mathrm{V}\cap\mathrm{H}) = 2$ cela impliquerait que $\mathrm{V}\cap\mathrm{H} = \mathrm{V}$ et donc que $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{H}$, ce qui est faux car $v_1 \in \mathrm{V}$ mais $v_1 \notin \mathrm{H}$. On obtient donc $\dim(\mathrm{V}\cap\mathrm{H}) = 1$.

En utilisant la formule de Grassmann on obtient alors que

$$\dim(\mathrm{V}+\mathrm{H}) = \dim(\mathrm{V}) + \dim(\mathrm{H}) - \dim(\mathrm{V}\cap\mathrm{H}) = 2+3-1 = 4.$$

7 On a vu que $\dim(\mathrm{V}\cap\mathrm{H}) = 1$ et que $\mathrm{V}ect(v_3) \in \mathrm{V}\cap\mathrm{H}$ donc on obtient $\mathrm{V}ect(v_3) = \mathrm{V}\cap\mathrm{H}$ et donc (v_3) est une base de $\mathrm{V}\cap\mathrm{H}$.