Fichiers Probabilites a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants.

J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Correction : L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a $\binom{300}{10}$.

Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1-\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Exercice 2 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction : Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a $20\,!$.

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ choix ;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a $18!$ choix.

Il y a au total : $19\binom{20}{2}(18!)$ choix possibles.

Exercice 4 : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction : – Une tenue est un triplet (P,T,C) : il y a $5\times 6\times 8=240$ tenues différentes ;

– ‹‹Il est tout en noir›› : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2\times 4\times 5=40$ façons.

La probabilité de l'événement ‹‹Il est tout en noir›› est donc : $\dfrac{40}{240}=\dfrac{1}{6}$.

– ‹‹Une seule pièce est noire sur les trois ›› : notons les événements : N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par : $(N_1\cap\overline{N_2}\cap\overline{N_3})\cup(\overline{N_1}\cap N_2\cap\overline{N_3})\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2}\cap N_3)$. Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement ‹‹une seule pièce est noire sur les trois›› est donc : 0.325.

Exercice 5 : Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants.

J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Correction : L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a $\dbinom{300}{10}$. Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1-\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}\simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Exercice 6 : La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?

Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Correction : $P(A\cap B)=pq$ car les maladies sont indépendantes.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=p+q-pq$

Exercice 7 : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Correction : Soit A : l'événement ‹‹tirer un roi›› et B : ‹‹tirer un pique››.

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{52}$; $P(A)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$; $P(B)=\dfrac{13}{52}=\dfrac{1}{4}$.

Donc $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ et donc les événements A et B sont indépendants.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{52}=\dfrac{4}{13}$.

Exercice 8 : Soit l'univers $\Omega=[\![1,2n]\!]$.

Peut-on trouver deux réels a,b tels que $\forall k\in\Omega,\quad P(\{k\})=ak+b$ définisse une probabilité et que $P([\![1,n]\!])=\dfrac{1}{4}$?

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

Correction :

1. Une grille-réponses est une suite ordonnée de 10 réponses, il y a 4 choix possibles pour chacune. Il y a donc 4^{10} grilles-réponses possibles.
2. L'événement E ‹‹répondre au hasard au moins 6 fois correctement›› est réalisé si le candidat répond bien à 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 questions. Notons A_n l'événement : ‹‹répondre au hasard exactement n fois correctement››. Alors, A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $10-n$ sont incorrectes : 3 choix sont possibles pour chacune de ces dernières. Comme il y a $\binom{10}{n}$ choix de n objets parmi 10, et donc il y a : $\binom{10}{n} \times 3^{10-n}$ façons de réaliser A_n et :

$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$

pour $n = 6, 7, 8, 9, 10$. $P(E) = \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728 \times 10^{-2}$, soit environ 2%.

Exercice 2 : Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Correction : Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité : $(1-0.7)\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.9) = 0.015$. La probabilité que l'oiseau soit touché est donc : $1 - 0.015 = 0.985$.

Exercice 3 : On dispose de deux pièces de monnaie. Une normale et une truquée ($P(Face) = p$ avec $p \neq \frac{1}{2}$).

On choisit au hasard une des deux pièces avec laquelle on fait des lancers successifs.

On appelle T l'événement « la pièce est truquée » et F_i l'événement « *Face* est obtenu au lancer N° i ».

1. Trouver la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée si on a obtenu *Face* au premier lancer.
2. Les événements F_1 et F_2 sont-ils indépendants ?
3. Déterminer la probabilité que la pièce soit truquée si on a obtenu uniquement des *Face* lors de n lancers successifs.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ?

Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Correction : Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants : $\Omega = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$, représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors $P(A) = \frac{2}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}, P(A\cap B) = \frac{2}{4}$. On en conclut que : $P(A\cap B) \neq P(A)P(B)$ et donc que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors $\Omega' = \{(a,b,c) \mid a \in \{G,F\}, b \in \{G,F\}, c \in \{G,F\}\}$ représente les $2^3 = 8$ cas possibles, équiprobables. Cette fois, $P(A) = 1 - P(\{(G,G,G),(F,F,F)\}) = \frac{6}{8}$; $P(B) = \frac{4}{8}, P(A\cap B) = P\{(F,G,G),(G,F,G),\{(G,G,F)\} = \frac{3}{8}$. On a $P(A)P(B) = \frac{3}{8} = P(A\cap B)$, et les événements A et B sont indépendants

Avec n enfants, on peut généraliser sans difficulté : $P(A) = 1 - \frac{2}{2^n}$, $P(B) = \frac{1+n}{2^n}$ $P(A\cap B) = \frac{n}{2^n}$ Un petit calcul montre que $P(A)P(B) = P(A\cap B)$ si et seulement si $n = 3$.

Exercice 2 : On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir *Pile* soit de $\frac{1}{3}$. Si on obtient *Pile*, on décide de jouer uniquement avec le dé A. Sinon, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^\star$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 3 : Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées).
On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

1. On obtient un « six » . Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
2. Au contraire, on a obtenu un « cinq » . Même question.

Exercice 4 : Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non » .
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?