Fichiers Denombrement a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : De combien de façons peut-on répartir n personnes autour d'une table ronde ?

Correction : $(n-1)!$: la première personne s'assoit où elle veut...

Exercice 2 : Combien de mains de cinq cartes extraites d'un jeu de 32 cartes contiennent exactement 2 As et 2 Cœurs ?

Correction :

1. Sans l'as de cœur : $\binom{3}{2}\binom{7}{2}\binom{21}{1} = 1\ 323.$
2. Avec l'as de cœur : $\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{2} = 4\ 410.$

Au total, 5 733 mains.

Exercice 3 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Correction : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Exercice 4 : Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres (écrits en base 10) où comportant un chiffre répété et un seul ?

Correction :

- Le chiffre répété est le premier :

  9 choix de chiffres ; 4 choix pour la position de la répétition ; $9 \times 8 \times 7$ pour les autres.
- Le chiffre répété n'est pas le premier :

  9 choix pour le chiffre en première place ;

  $\binom{4}{2}$ choix de positions pour la répétition, et 9 choix de chiffres (différents du premier) ;

  8×7 pour les autres.

Au total : $9 \times 4 \times 9 \times 8 \times 7 + 9 \times \left[\binom{4}{2} \times 9\right] \times 8 \times 7 = 18144 + 27216 = 45360.$

Exercice 5 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Exercice 6 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 :

1. On dispose de 5 couleurs pour colorier un drapeau constitué de 6 bandes, deux zones voisines ne pouvant recevoir la même couleur. Dénombrer les coloriages possibles.
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
3. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres qui finissent par une voyelle ? par deux voyelles distinctes ?

Correction :

1. $5 \times 4^5 = 5\ 120$
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles 3^{50}
3. une voyelle : $26^4 \times 6$; deux voyelles distinctes $26^3 \times 6 \times 5$.

Exercice 2 :

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant (en écriture décimale) avec p chiffres ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant avec p chiffres ne comportant pas de 0 dans leur écriture ?
3. Quel est le pourcentage de nombres s'écrivant avec 46 chiffres ou moins, et qui comportent le chiffre 0 dans leur écriture.

Correction :

1. $9 \times 10^{p-1}$.
2. 9^p.
3. Le complémentaire est $9 + 9^2 + \dots + 9^{46} = 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{9-1}$.

   Le pourcentage est donc $1 - 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{8 \times 10^{46}} \approx 99,1\%$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

Correction : $f : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_n$ est surjective $\iff$ il existe un, et un seul élément de $\mathbb{N}_n$ ayant deux antécédents, les autres en ayant exactement un.

$$\binom{n+1}{2} \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

Exercice 4 : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes.

Il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?

Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction : Une tenue est un triplet $(\mathrm{P}, \mathrm{T}, \mathrm{C})$: il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes.

– ‹‹Il est tout en noir›› : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.

  La probabilité de l'événement ‹‹Il est tout en noir›› est donc : $\dfrac{40}{240} = \dfrac{1}{6}$.

– ‹‹Une seule pièce est noire sur les trois ›› : notons les événements :

  N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par :

  $(\mathrm{N}_1 \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \mathrm{N}_2 \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \mathrm{N}_3)$.

  Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement ‹‹une seule pièce est noire sur les trois›› est donc : 0.325.

Exercice 5 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\dbinom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \dbinom{30}{2} = 870$ bises.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un ensemble fini E à n éléments.

Combien y a-t-il de couples $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ tels que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$?

Correction : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$.

Exercice 7 : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$.

Correction : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p} = 2^p \binom{n}{p}$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

Correction : $f : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_n$ est surjective $\iff$ il existe un, et un seul élément de $\mathbb{N}_n$ ayant deux antécédents, les autres en ayant exactement un.

$$\binom{n+1}{2} \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Exercice 9 : Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres (écrits en base 10) où comportant un chiffre répété et un seul ?

Correction :

- Le chiffre répété est le premier :

  9 choix de chiffres ; 4 choix pour la position de la répétition ; $9 \times 8 \times 7$ pour les autres.
- Le chiffre répété n'est pas le premier :

  9 choix pour le chiffre en première place ;

  $\binom{4}{2}$ choix de positions pour la répétition, et 9 choix de chiffres (différents du premier) ;

  8×7 pour les autres.

Au total : $9 \times 4 \times 9 \times 8 \times 7 + 9 \times \left[\binom{4}{2} \times 9\right] \times 8 \times 7 = 18144 + 27216 = 45360.$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :

   a) a et b ;
   b) a mais pas b ;
   c) b mais pas a ;
   d) ni a, ni b.

2. En déduire une relation reliant un $\binom{12}{\dots}$ à des $\binom{10}{\dots}$.

Correction :

1. a) a et b : $\binom{10}{3}$
   b) a mais pas b : $\binom{10}{4}$
   c) b mais pas a : $\binom{10}{4}$
   d) ni a, ni b : $\binom{10}{5}$

2. $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un ensemble fini E de cardinal n.
Dénombrer les couples (X, Y) de $\mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ tels que $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ soit un singleton.

Correction : On compte les possibilités telles que X ait p éléments $(1 \leqslant p \leqslant n)$.

$\binom{n}{p}$ choix pour les éléments de X ; p choix pour l'élément qu'on retrouvera dans Y.

Il reste à choisir les autres éléments de Y : nombre de parties de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{X}$: 2^{n-p}.

Au total : $\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} 2^{n-p} = n3^{n-1}$.

Exercice 3 : Le bridge se joue avec un jeu de 52 cartes, et une main est formée de 13 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles au bridge ?
2. Calculer le nombre de mains comportant :
   a) 4 Trèfles, 3 Carreaux, 3 Cœurs, 3 Piques ;
   b) 5 Trèfles, 3 Carreaux, 3 Cœurs, 2 Piques.
3. Déterminer les mains les plus nombreuses entre celles réparties $4-3-3-3$ et celles réparties $5-3-3-2$.

   Une main répartie $5-3-3-2$ est une main comportant 5 cartes d'une couleur, 3 cartes d'une deuxième couleur, 3 cartes d'une troisième couleur, et 2 cartes de la couleur restante. Les couleurs étant Trèfle, Carreau, Cœur, Pique.

Correction :

1. $\binom{52}{13} \approx 6,35.10^{11}$ mains possibles .
2. Calculer le nombre de mains comportant :
   a) $\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3} = 715 \times 286^3 \approx 1,67.10^{10}$ mains contenant $4\clubsuit$, $3\diamondsuit$, $3\heartsuit$, $3\spadesuit$;
   b) $\binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{2} = 1287 \times 286^2 \times 78 \approx 8,21.10^9$ mains contenant $5\clubsuit$, $3\diamondsuit$, $3\heartsuit$, $2\spadesuit$;
3. Mains $4-3-3-3$: $\binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{2} \times \binom{4}{3} \approx 6,69.10^{10}$.

   Mains $5-3-3-2$: $\binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{2} \times \binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1} \approx 9,85.10^{10}$.

   Il y a davantage de mains $5-3-3-2$ que de mains $4-3-3-3$.

Exercice 4 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction : Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a $20!$.

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ choix ;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a $18!$ choix.

Il y a au total : $19\binom{20}{2}(18!)$ choix possibles.

Exercice 5 : Soit un ensemble E à n éléments. Soit un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ de 2^{n-1} éléments $\mathcal{A} = \{\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{2^{n-1}}\}$. On suppose que $\mathcal{A}$ satisfait à la condition suivante :

$$\forall (j,k,l), \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_l \neq \varnothing$$

1. Montrer que $\bigcap_{\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}} \mathrm{A}_i \neq \varnothing$.

2 En déduire qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathcal{A} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}), x \in \mathrm{A}\}$.

Correction :

1 On ne peut pas avoir A et $\overline{\mathrm{A}}$ dans $\mathcal{A}$. D'autre part, comme le cardinal de $\mathcal{A}$ est 2^{n-1}, on a nécessairement, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, soit $\overline{\mathrm{A}} \in \mathcal{A}$.

On démontre ensuite que $\mathcal{A}$ est stable par intersection : On part avec $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, on a alors $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ qui est tel que C ou $\overline{\mathrm{C}}$ est dans $\mathcal{A}$. Du fait de la condition sur l'intersection de trois ensembles, on a $\mathrm{C} \in \mathcal{A}$.

Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}} \mathrm{A}_i$ est encore dans $\mathcal{A}$. Et comme $\varnothing \notin \mathcal{A}$ (du fait de la condition d'intersection triple), il existe au moins un élément x dans cette intersection.

2 On a déjà trouvé x à la question précédente. Et comme on a égalité des cardinaux, on a bien ce que l'on voulait.

Exercice 6 : De combien de manières peut-on placer n tours sur un échiquier $n \times n$ afin qu'elle ne puissent pas se prendre.

Parmi celles-ci, combien sont symétriques par rapport au centre de l'échiquier ?

Correction : $8!$ puis $8 \times 1 \times 6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1$.