Fichiers Espace-Vectoriel a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(0) = P(1)\}$.
E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $O \in E$ donc $E \neq \emptyset$;
- Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  On a $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ et de même $(\lambda P + \mu Q)(1) = 0$.
  Par conséquent, $\lambda P + \mu Q \in E$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 2 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}.$$
$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}.$$

Correction :

1. a) $(0, 0, 0) \in E_1$.
   b) Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de E_1. On a donc $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$. Donc $3(x + x') - 7(y + y') = (z + z')$, d'où $(x + x', y + y', z + z')$ appartient à E_1.
   c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_1$. Alors la relation $3x - 7y = z$ implique que $3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z$ donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_1.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $(1, 0, -1)$ et $(1, 0, 1)$ appartiennent à E_2 mais $(1, 0, -1) + (1, 0, 1) = (2, 0, 0)$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}.$$
$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

Correction :

1. E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   a) $(0, 0, 0) \in E_3$.
   b) Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de E_3. On a donc $x + y - z = x + y + z = 0$ et $x' + y' - z' = x' + y' + z' = 0$. Donc $(x + x') + (y + y') - (z + z') = (x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$ et $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ appartient à E_3.
   c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_3$. Alors la relation $x + y - z = x + y + z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_3.
2. Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\mathrm{E}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+a=0 \text{ et } x+3az=0\right\}.$$

$$\mathrm{E}_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1)=0\}.$$

Correction :

1. E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin \mathrm{E}_1$; oui, si $a=0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 5 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\mathrm{E}_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=1\}.$$

$$\mathrm{E}_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+\alpha y+1 \geqslant 0\right\}.$$

Correction :

1. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
2. E_4 : non, en fait E_4 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0) \in \mathrm{E}_4$ mais $-(2,0)=(-2,0) \notin \mathrm{E}_4$.

Exercice 6 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$\mathrm{F}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+z \geqslant 0\right\}.$$

$$\mathrm{F}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+z=0\right\}.$$

Exercice 7 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$\mathrm{F}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+3z=1\right\}.$$

$$\mathrm{F}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x=y=z\right\}.$$

Exercice 8 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
— L'ensemble des fonctions monotones.
— L'ensemble des fonctions paires ou impaires.

Exercice 9 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions bornées sur $[-1,1]$.
— L'ensemble des fonctions croissantes sur $[-1,1]$.
— L'ensemble des fonctions paires.

Exercice 10 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
— L'ensemble des fonctions impaires.
— $\{f \in \mathrm{E}, \exists\, x \in \mathbb{R}, f(x)=0\}$.

Exercice 11 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions périodiques de période T (T fixé).
— $\{f \in \mathrm{E}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x)=0\}$.
— $\{f \in \mathrm{E}, \forall\, x \in [0,1], f(x)=0\}$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\mathcal{V}$ est l'ensemble des fonctions qui peuvent s'écrire comme différence de deux éléments de $\mathcal{C}$.

Montrer que $\mathcal{V}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Correction :

- $0 = 0 - 0 \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{V} \neq \emptyset$;
- Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

  Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$, avec $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}$.

  On a $f + g = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$.

  Or $f_1 + g_1, f_2 + g_2 \in \mathcal{C}$ (la somme de deux fonctions croissantes est croissante), donc $f + g \in \mathcal{V}$.
- Soient $f \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$.

  Si $\lambda \geqslant 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = \lambda f_1 - \lambda f_2 \in \mathcal{V}$ car $\lambda f_1, \lambda f_2 \in \mathcal{C}$.

  Si $\lambda < 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = -\lambda f_2 - (-\lambda f_1) \in \mathcal{V}$ car $-\lambda f_2, -\lambda f_1 \in \mathcal{C}$.

On en déduit que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{G} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

G est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{G} \neq \emptyset$;
- Soient $u, v \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  On a $(\lambda u+\mu v)_{n+2} = \lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1}+2u_n)+\mu(3v_{n+1}+2v_n) = 3(\lambda u+\mu v)_{n+1}+2(\lambda u+\mu v)_n$.

  Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in \mathrm{G}$.

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction : Non. Tout d'abord par définition $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Nous allons trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0, 0, 0, 1)$.

$u \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α, β, γ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α, β, γ tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à trouver α, β, γ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.

Exercice 4 : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction : Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.

Exercice 5 : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction : Non. Il y a bien quatre vecteurs mais il existe des relations entre eux.

On peut montrer $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ ne sont pas supplémentaires de deux façons. Première méthode : leur intersection est non nulle, par exemple $v_4 = v_5 - v_3$ est dans l'intersection. Deuxième méthode : les deux espaces n'engendrent pas tout, en effet il est facile de voir que $(0,0,1,0) \notin \mathrm{Vect}\{v_1, v_4\} + \mathrm{Vect}\{v_3, v_5\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_4, v_3, v_5\}$.

Exercice 6 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit

$$\mathrm{E}_a = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}; (\mathrm{X} - a)/\mathrm{P}\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $a \neq b$ alors $\mathrm{E} = \mathrm{E}_a + \mathrm{E}_b$.

La somme est-elle directe ?

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et F, G deux sev de E.

On considère H un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans G.

Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

Exercice 8 : Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9 : Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $u = (1,1,1)$. On pose :

- $\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$;
- $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(u)$.

1. Écrire G sous la même forme que F.

2. Montrer que F est un sev de E.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 10 : Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose :

— $A = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0 \right\}$;

— G l'ensemble des applications constantes de E.

Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Correction : Soit $f \in E$.

$$f = \underbrace{f - \int_0^1 f}_{\in A} + \underbrace{\int_0^1 f}_{\in G}$$

Exercice 11 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose :

— $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de E ;

— $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de E .

Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Donner la décomposition de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (1+x)^n$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$ sur $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 12 : Soient $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $F = \text{Vect}(u)$ puis $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Exercice 13 : Soient

— $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}$,

— $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$,

— $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0\}$,

Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Soit $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists k \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k|x|\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $0 \in E$ donc $E \neq \emptyset$;
- Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

  Par définition, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k_1|x|$ et $|g(x)| \leqslant k_2|x|$.

  On a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant k_1|x| + k_2|x| = (k_1 + k_2)|x|$.

  On peut donc poser $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{R}_+$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| \leqslant k|x|$, i.e. $(f+g) \in E$.
- Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Par définition, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k|x|$.

  Si $\lambda \in \mathrm{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda|k|x|$.

  On peut donc poser $k' = |\lambda|k \in \mathbb{R}_+$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| \leqslant k'|x|$, i.e. $\lambda f \in E$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel, et F, G deux sev de E.

Montrer que $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ est un sev de E $\iff$ ($\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ ou $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$).

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel, et $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$ trois sev de E.

Montrer que $\begin{cases} \mathrm{F}+\mathrm{H}=\mathrm{G}+\mathrm{H} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{H}=\mathrm{G} \cap \mathrm{H} \\ \mathrm{F} \subset \mathrm{G} \end{cases} \implies \mathrm{F}=\mathrm{G}.$

Exercice 4 : On considère les vecteurs $v_1=(1,0,0,1)$, $v_2=(0,0,1,0)$, $v_3=(0,1,0,0)$, $v_4=(0,0,0,1)$, $v_5=(0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction : Oui. Notons $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{G}=\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$. Pour montrer $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}=\mathbb{R}^4$ il faut montrer $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}=\{(0,0,0,0)\}$ et $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathbb{R}^4$.

1. Montrons $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}=\{(0,0,0,0\}$. Soit $u \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, d'une part $u \in \mathrm{F}=\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u=\alpha v_1+\beta v_2$. D'autre part $u \in \mathrm{G}=\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ donc il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $u=\gamma v_4+\delta v_5$. On a écrit u de deux façons donc on a l'égalité $\alpha v_1+\beta v_2=\gamma v_4+\delta v_5$. En écrivant les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela donne

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases}\alpha=0\\0=\delta\\\beta=0\\\alpha=\gamma+\delta\end{cases}$$

Cela implique $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ et donc $u=(0,0,0,0)$. Ainsi le seul vecteur de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est le vecteur nul.

2. Montrons $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathbb{R}^4$. $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}+\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}=\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Il faut donc montrer que n'importe quel vecteur $u=(x_0, y_0, z_0, t_0)$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme une combinaison linéaire de v_1, v_2, v_4, v_5. Fixons u et cherchons $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_4+\delta v_5=u$. Après avoir considéré les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela revient à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases}\alpha=x_0\\\delta=y_0\\\beta=z_0\\\alpha+\gamma+\delta=t_0\end{cases}$$

Nous étant donné un vecteur $u=(x_0, y_0, z_0, t_0)$ on a calculé qu'en choisissant $\alpha=x_0$, $\beta=z_0$, $\gamma=t_0-x_0-y_0$, $\delta=y_0$ on obtient bien $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_4+\delta v_5=u$. Ainsi tout vecteur est engendré par $\mathrm{F}+\mathrm{G}$.

Ainsi $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}=\{(0,0,0,0)\}$ et $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathbb{R}^4$ donc $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}=\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 : Soit $\mathrm{E}=\Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $\mathrm{F}=\{f \in \mathrm{E} \mid f(0)=f'(0)=0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Correction : Analysons d'abord les fonctions de E qui ne sont pas dans F : ce sont les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ **ou** $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R}^*)$ ou les homothéties $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R}^*)$ n'appartiennent pas à F.

Cela nous donne l'idée de poser

$$\mathrm{G} = \left\{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.

Soit $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in \mathrm{G}$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in \mathrm{F}$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.

Soit $h \in \mathrm{E}$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in \mathrm{F}$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in \mathrm{G}$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
En conclusion nous avons montré que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 6 : Soit $\mathrm{E} = \mathrm{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, f'' - 2f' + 5f = 0\}$ et $\mathrm{H} = \{f \in \mathrm{E}, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Vérifier que G et H sont des sev de E.
2. Sans calcul, justifier que G et H sont en somme directe.
3. Prouver que G et H sont des sev supplémentaires de E.

Exercice 7 : Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0$. Soient F et G les ensembles de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions respectivement des équations différentielles $y' = -y$ et $y' = 3y$.

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E.