Fichiers Probabilites-Conditionnelles a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction : Notons les différents événements : $\mathrm{F}e$: « être femme », $\mathrm{L}u$: « porter des lunettes », H : « être homme »

Alors on a $\mathrm{P}(\mathrm{F}e) = 0.6$, $\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e) = \frac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle « porter des lunettes » sachant que la personne est une femme.

De même, on a $\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{H}) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u)$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u)\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e)$ avec $\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e) + \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{H})\mathrm{P}(\mathrm{H})$.

Application numérique : $\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = 0.4$, donc $\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e)}{\mathrm{P}(\mathrm{L}u)} = 0.5$.

Exercice 2 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction :

1. Le taux global de personnes soulagées : $\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{S}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{S})/\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{S}/\mathrm{A})/\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%.$$

Exercice 3 : Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité P(A) pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité P(B) pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité P(C) pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité P(D) pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Correction :

1. L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles :

   il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $\mathrm{P(A)}$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\frac{1}{6!}$.
2. André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a $5!$ permutations pour ces derniers :

   $\mathrm{P(B)} = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$.
3. André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a $4!$ permutations pour ces derniers :

   $\mathrm{P(C)} = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$.
4. André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements D_1 : ‹‹André danse avec son épouse››; D_2 : ‹‹René danse avec son épouse››.

   Alors $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2$ et $\mathrm{P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)} = \frac{3}{10}$.

Exercice 4 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction : Notons les différents événements : Fe : ‹‹être femme››, $\mathrm{L}u$: ‹‹porter des lunettes››, H : ‹‹être homme››

Alors on a $\mathrm{P(Fe)} = 0.6$, $\mathrm{P(L}u\mathrm{/Fe)} = \frac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de ‹‹porter des lunettes›› sachant que la personne est une femme. De même, on a $\mathrm{P(L}u\mathrm{/H)} = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P(Fe/L}u)$. D'après la formule des probabilités totales on a : $\mathrm{P(Fe/L}u)\mathrm{P(L}u) = \mathrm{P(L}u\mathrm{/Fe)P(Fe)}$ avec $\mathrm{P(L}u) = \mathrm{P(L}u\mathrm{/Fe)P(Fe)} + \mathrm{P(L}u\mathrm{/H)P(H)}$.

Application numérique : $\mathrm{P(L}u) = 0.4$, donc $\mathrm{P(Fe/L}u) = \frac{\mathrm{P(L}u\mathrm{/Fe)P(Fe)}}{\mathrm{P(L}u)} = 0.5$. Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

Exercice 5 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction : La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1 - (\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$. On a facilement : $n \geqslant 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1 - (\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geqslant 21$.

Exercice 6 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction :

1. Le taux global de personnes soulagées : $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)P(S/A)/$

Exercice 7 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Correction :

1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $P(CB/YB) = P(YB/CB)P($
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $P(YB/CB) = P(YB \cap CB)/P(CB) = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $P(\text{non}YB/CB) = 1 - P(YB/CB) = 0.4$.

Exercice 8 : Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Correction :

1. Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$
2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à ‹‹choisir›› parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons Par exemple :

$$| \bullet \bullet || \bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet\bullet |$$

les gagnants sont : 1; 4; 5; 7; 11; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38 (= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\frac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.059\,1 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 (Inégalité de Bonferroni) :
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_n\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_i\right)\right) - (n-1).$$

Correction : On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule

$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$

La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_{n-1}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A}_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_n\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(\mathrm{A})$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leqslant 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_n\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_i\right) - (n-2) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_n\right) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Exercice 2 : Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

Exercice 3 : Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{G}_n)$.

On note $v_n = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}_n})$.

1. Écrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n.

   Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Correction :

1. $u_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}/\mathrm{G}n)\mathrm{P}(\mathrm{G}n) + \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}/\overline{\mathrm{G}_n})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$.

   $v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$.

   Donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

   Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1-u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \dfrac{3}{7}$. Donc $u_n = \dfrac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \dfrac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.

Exercice 4 : Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9.

Quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ?

Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

Correction : Définissons les événements : F_n ‹‹Fumer le n-ème jour››, et $\overline{F_n}$ l'événement complémentaire. Alors $\{\overline{F_n}, F_n\}$ constitue un système complet d'événements, $P_n = P(F_n)$; on peut donc écrire : $P(\overline{F_{n+1}}) = P(\overline{F_{n+1}}/F_n)P(F_n) + P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})P(\overline{F_n})$.

Comme $P(\overline{F_{n+1}}/F_n) = 0.9$ et $P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}) = 0.3$ $1 - P_{n+1} = 0.9P_n + 0.3(1 - P_n)$, soit $P_{n+1} = -0.6P_n + 0.7$. Notons $(\mathcal{R})$ cette relation.

Pour connaître le comportement à long terme, il faut étudier cette suite récurrente ; il y a des techniques mathématiques pour ça, c'est le moment de s'en servir.

Cherchons la solution de l'équation ‹‹$\ell = -0.6\ell + 0.7$››, la limite éventuelle satisfait nécessairement cette équation : faire un passage à la limite dans la relation $(\mathcal{R})$, ou utiliser le théorème du point fixe.

On trouve $\ell = \frac{7}{16}$; alors, la suite $Q_n = (P_n - \ell)$ vérifie : $Q_{n+1} = -0.6Q_n$, ce qui permet de conclure : $Q_{n+1} = (-0.6)^n Q_1$ et comme $((-0.6)^n)$ est une suite qui tend vers 0, on peut dire que la suite (Q_n) tend vers 0 et donc que la suite (P_n) tend vers $\ell = \frac{7}{16}$.

Conclusion : la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n tend vers $\frac{7}{16} \simeq 0.4375$.

Exercice 5 : Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.

On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n

Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

Correction : $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.

La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ soit $\ell = \frac{4}{13}$. Donc $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Exercice 6 : Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

Correction : On obtient par calcul direct ou par événement contraire la probabilité de voler : $1-p+p(1-q)^2$.

Exercice 7 : On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

— Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
— Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Correction :

1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = \mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M})/\mathrm{P}(\mathrm{T}^+)$ or $\mathrm{P}(\mathrm{T}^+) = \mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M})+\mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{S})\mathrm{P}(\mathrm{S}) = 0.95\cdot 0.03+0.1\cdot 0.97 = 0.125\,5$. D'où : $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = 22.7\%$.
2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $\mathrm{P}(\mathrm{S}/\mathrm{T}^+) = 1-\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = 77.3\%$.
3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^-) = 0.0017$.
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1-\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Exercice 8 : Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Correction : Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a $8\,!$. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

1. Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : BMMMMMMM, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a $7!$ permutations de ce type. Donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{7!}{8!} = \dfrac{1}{8}$, on s'en doutait !
2. De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : MBMMMMMM : il y en a encore $7\,!$, et la probabilité est la même.
3. Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième,..., huitième essai.

Exercice 9 : Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité $P(B)$ pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité $P(C)$ pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité $P(D)$ pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Correction :

1. L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles : il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\frac{1}{6!}$.
2. André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a $5!$ permutations pour ces derniers : $P(B) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$.
3. André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a $4!$ permutations pour ces derniers : $P(C) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$.
4. André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements D_1 : ‹‹André danse avec son épouse››; D_2 : ‹‹René danse avec son épouse››. Alors $D = D_1 \cup D_2$ et $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10}$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note :
E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.
On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$.
En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n
Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

Correction : $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$.

Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.

La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ soit $\ell = \frac{4}{13}$.

Donc $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Exercice 2 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction : La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$.

Je cherche donc n tel que : $1-(\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$.

On a facilement : $n \geqslant 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1-(\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%.

Pour la probabilité 99%, $n \geqslant 21$.

Exercice 3 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction : La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$.

Je cherche donc n tel que : $1-(\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$.

On a facilement : $n \geqslant 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1-(\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%.

Pour la probabilité 99%, $n \geqslant 21$.

Exercice 4 : Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Correction :

1. Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$
2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ?

   Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à « choisir » parmi 49.

   En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons

   Par exemple :

   $$| \bullet\bullet || \bullet | \bullet\bullet\bullet | \bullet\bullet |$$

   les gagnants sont : 1; 4; 5; 7; 11; 14.

   Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes.

Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38(= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes.

Il y a $\dfrac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.059\,1 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Exercice 5 : Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

— Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.

— Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Écrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n. Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Correction :

1. $u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/Gn)P(Gn) + P(G_{n+1}/\overline{G_n})P(\overline{G_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$.

$v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$.

Donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1-u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \dfrac{3}{7}$. Donc $u_n = \dfrac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \dfrac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.