Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_\mathrm{B}$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.
Montrer que $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère :

- $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = 0\}$;
- $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Les événements* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* A *et* $\bar{\mathrm{B}}$ *sont indépendants, si et seulement si...*

Exercice 1 : Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants.

J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$.

On considère $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -1, -2)$, $w = (3, 7, 0)$, $x = (5, 0, -7)$.

Montrer que $\mathrm{vect}\,(u, v) = \mathrm{vect}\,(w, x)$.

Exercice 3 : Soient $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2z + 3t = 0\}$.

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$. Sont-ils supplémentaires ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Existence d'un supplémentaire en dimension finie.*

Exercice 1 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

Montrer que $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On considère :

- $\mathrm{F} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathrm{G} = \{(u+v, u+v, u), u, v \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Théorème de la base incomplète.*

Exercice 1 : Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(A)}$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(B)}$ pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(C)}$ pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité $\mathrm{P(D)}$ pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $u = (1, 2, -1)$, $v = (-6, 0, 2)$.
Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{vect}\,(u, v) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.
On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_B$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et F, G deux sev de E.

On considère H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G.

Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Formule de Grassmann.*

Exercice 1 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 2 : Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$.
Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$.
On considère $u = (-12, -2, 5)$, $v = (2, -1, 4)$, $w = (5, 0, 1)$.

1. L'un des vecteurs est-il combinaison linéaire des autres ?
2. Définir $\text{vect}\,(u)$ et $\text{vect}\,(v, w)$.
3. Montrer que $\text{vect}\,(u) \oplus \text{vect}\,(v, w) = \mathrm{E}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_\mathrm{B}$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Exercice 2 : Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 3 : Soit $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - 2y + z - t = 0\}$.
On considère $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (3, 0, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 4, -1, -1)$.

1. Calculer $\dim \mathrm{F}$, $\dim \mathrm{G}$, $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$, $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})$.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Les événements* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* A *et* $\bar{\mathrm{B}}$ *sont indépendants, si et seulement si...*

Exercice 1 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Exercice 2 : Montrer que toute suite de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Montrer que toute suite de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question avec $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Existence d'un supplémentaire en dimension finie.*

Exercice 1 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 2 : Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$.
Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Théorème de la base incomplète.*

Exercice 1 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles).

On considère les trois éléments de E suivants : $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (\cos(n\theta + b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés.

Montrer que (u, v, w) est une famille liée.

Exercice 3 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x.$

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Exercice 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = 1 & \text{si } x = \alpha \\ f_\alpha(x) = 0 & \text{si } x \neq \alpha \end{cases}.$$

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 3 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Formule de Grassmann.*

Exercice 1 : Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Exercice 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$.
Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 3 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ et $w = (1,2,-3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?

Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Exercice 2 : Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

Donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Les événements* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* A *et* $\bar{\mathrm{B}}$ *sont indépendants, si et seulement si...*

Exercice 1 : Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants.

J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Exercice 2 :

1. Calculer pour p et q entiers naturels donnés les intégrales suivantes :

$$\mathrm{J}(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\ dx,\ \mathrm{K}(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)\ dx \text{ et}$$
$$\mathrm{L}(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\ dx.$$

2. Montrer que la famille de fonctions $(\cos(px))_{p\in\mathbb{N}_{n_0}} \cup (\sin(qx))_{q\in\mathbb{N}^*_{n_0}}$ est libre.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(2) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels
2. Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Existence d'un supplémentaire en dimension finie.*

Exercice 1 (Inégalité de Bonferroni) :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1).$$

Exercice 2 : Soit $f(x) = \ln(1+x)$ pour x réel positif. Soient $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$ et $f_3 = f \circ f \circ f$. Étudier la liberté de (f_1, f_2, f_3) dans $[0, +\infty[^{[0,+\infty[}$.

Exercice 3 : Vrai ou faux ?

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Théorème de la base incomplète.*

Exercice 1 : Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

Exercice 2 : Soit $f_a(x) = |x - a|$ pour a et x réels.

Étudier la liberté de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Exercice 3 :

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n\}$ avec $\deg \mathrm{P}_i = i$ (pour $i = 0, 1, \dots, n$) forme une base de E.
2. Écrire le polynôme $\mathrm{F} = 3\mathrm{X} - \mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X}^3$ sous la forme $\mathrm{F} = a + b(1-\mathrm{X}) + c(\mathrm{X}-\mathrm{X}^2) + d(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}^3)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ puis sous la forme $\mathrm{F} = \alpha + \beta(1+\mathrm{X}) + \gamma(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) + \delta(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2+\mathrm{X}^3)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Exercice 2 :

1. Soient $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,2)$ et $v_3 = (3,3,6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. On considère deux plans vectoriels

$$\mathrm{P}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$\mathrm{P}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

trouver un vecteur directeur de la droite $\mathrm{D} = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ ainsi qu'une équation paramétrée.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \big\{(x+y-2z,\ y+5z,\ 3x+y+z,\ x+y+z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. En donner une base.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Formule de Grassmann.*

Exercice 1 : Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$.

On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Écrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n.

   Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Exercice 2 : On pose $f_a(x) = e^{ax}$ pour a et x réels.

Étudier la liberté de la famille de fonctions $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Exercice 3 : Projection et symétrie dans K^3

Dans K^3, on donne les sous espaces : $\begin{cases} H = \{\overrightarrow{X} = (x,y,z) \text{ tq } x+y+z=0\} \\ K = \text{vect}(\overrightarrow{U} = (1,1,2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2. Démontrer que $H \oplus K = K^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_H et s_H.