Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_B$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction : Notons les différents événements : Fe : ‹‹être femme››, Lu : ‹‹porter des lunettes››, H : ‹‹être homme››

Alors on a $P(Fe) = 0.6$, $P(Lu/Fe) = \dfrac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle ‹‹porter des lunettes›› sachant que la personne est une femme.

De même, on a $P(Lu/H) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $P(Fe/Lu)$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$P(Fe/Lu)P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe)$ avec $P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe) + P(Lu/H)P(H)$.

Application numérique : $P(Lu) = 0.4$, donc $P(Fe/Lu) = \dfrac{P(Lu/Fe)P(Fe)}{P(Lu)} = 0.5$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

Montrer que $\text{vect}\,(f_1, f_2) = \text{vect}\,(\text{ch}\,, \text{sh}\,)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère :

- $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = 0\}$;
- $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

- F et G sont des sev.
- $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{\mathrm{O}\}$ immédiat.
- On a $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

  Soit $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f : x \mapsto \phi(x) - \phi(1)x$ et $g : x \mapsto \phi(1)x$.

  On a bien $f \in \mathrm{F}$, $g \in \mathrm{G}$ et $\phi = f + g$. Donc $f \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Les événements* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* A *et* $\bar{B}$ *sont indépendants, si et seulement si...*

Exercice 1 : Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants.

J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Correction : L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a $\binom{300}{10}$.

Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1-\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Exercice 2 : Soit $E=\mathbb{R}^3$.

On considère $u=(2,3,-1)$, $v=(1,-1,-2)$, $w=(3,7,0)$, $x=(5,0,-7)$.

Montrer que $\operatorname{vect}(u,v)=\operatorname{vect}(w,x)$.

Exercice 3 : Soient $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x-2y=0\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+2z+3t=0\}$.

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$. Sont-ils supplémentaires ?

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Existence d'un supplémentaire en dimension finie.*

Exercice 1 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction :

1. Le taux global de personnes soulagées : $\mathrm{P(S)} = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé :

$$\mathrm{P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)P(S/A)/P(S)} = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%.$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

Montrer que $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On considère :

- $\mathrm{F} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathrm{G} = \{(u + v, u + v, u), u, v \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathrm{E = F \oplus G}$.

Correction :

- F et G sont des sev.
- On a $\mathrm{F + G \subset E}$. Montrons que $\mathrm{E \subset F \oplus G}$.

  Soit $(x, y, z)\mathbb{R}^3$. On cherche $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ tels que $(x, y, z) = f + g$.

  Comme $f \in \mathrm{F}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$.

Comme $g \in \mathrm{G}$, il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tel que $f = (u+v, u+v, u)$.

$$(x,y,z) = f + g \iff \begin{cases} \alpha + u + v = x \\ 2\alpha + u + v = y \\ 3\alpha + u = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -x + y \\ u = 3x - 3y + z \\ v = -x + 2y - z \end{cases}.$$

(x,y,z) est donc décomposable de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G. On en déduit que F et G sont en somme directe, et que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Théorème de la base incomplète.*

Exercice 1 : Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité P(A) pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité P(B) pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité P(C) pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité P(D) pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Correction :

1. L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles :

   il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $\mathrm{P(A)}$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\dfrac{1}{6!}$.
2. André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a $5!$ permutations pour ces derniers :

   $\mathrm{P(B)} = \dfrac{5!}{6!} = \dfrac{1}{6}$.
3. André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a $4!$ permutations pour ces derniers :

   $\mathrm{P(C)} = \dfrac{4!}{6!} = \dfrac{1}{30}$.
4. André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements $\mathrm{D_1}$: ‹‹André danse avec son épouse››; $\mathrm{D_2}$: ‹‹René danse avec son épouse››.

   Alors $\mathrm{D} = \mathrm{D_1} \cup \mathrm{D_2}$ et $\mathrm{P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)} = \dfrac{3}{10}$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $u = (1, 2, -1)$, $v = (-6, 0, 2)$.

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{vect}(u, v) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.
On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Montrer que E et F sont égaux.

Correction : Montrons d'abord que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. On va d'abord montrer que $v_1 \in \mathrm{F}$ et $v_2 \in \mathrm{F}$.

Tout d'abord $v_1 \in \mathrm{F} \iff v_1 \in \mathrm{Vect}\{w_1, w_2\} \iff \exists \lambda, \mu \quad v_1 = \lambda w_1 + \mu w_2$.

Il s'agit donc de trouver ces λ, μ. Cela se fait en résolvant un système (ici on peut même le faire de tête) on trouve la relation $7(2, 3, -1) = 3(3, 7, 0) - (5, 0, -7)$ ce qui donne la relation $v_1 = \frac{3}{7}w_1 - \frac{1}{7}w_2$ et donc $v_1 \in \mathrm{F}$.

De même $7v_2 = -w_1 + 2w_2$ donc $v_2 \in \mathrm{F}$.

Maintenant v_1 et v_2 sont dans l'espace vectoriel F, donc toute combinaison linéaire de v_1 et v_2 aussi, c'est-à-dire : pour tout λ, μ, on a $\lambda v_1 + \mu v_2 \in \mathrm{F}$. Ce qui implique $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$.

Il reste à montrer $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Il s'agit donc d'écrire w_1 (puis w_2) en fonction de v_1 et v_2. On trouve $w_1 = 2v_1 - v_2$ et $w_2 = v_1 + 3v_2$. Encore une fois cela entraîne $w_1 \in \mathrm{E}$ et $w_2 \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{Vect}\{w_1, w_2\} \subset \mathrm{E}$ d'où $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

Par double inclusion on a montré $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et F, G deux sev de E.

On considère H un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans G.

Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Formule de Grassmann.*

Exercice 1 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction : Notons les différents événements : Fe : ‹‹être femme››, Lu : ‹‹porter des lunettes››, H : ‹‹être homme››

Alors on a $\mathrm{P(Fe)} = 0.6$, $\mathrm{P(Lu/Fe)} = \dfrac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de ‹‹porter des lunettes›› sachant que la personne est une femme. De même, on a $\mathrm{P(Lu/H)} = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P(Fe/Lu)}$. D'après la formule des probabilités totales on a : $\mathrm{P(Fe/Lu)P(Lu)} = \mathrm{P(Lu/Fe)P(Fe)}$ avec $\mathrm{P(Lu)} = \mathrm{P(Lu/Fe)P(Fe)} + \mathrm{P(Lu/H)P(H)}$.

Application numérique : $\mathrm{P(Lu)} = 0.4$, donc $\mathrm{P(Fe/Lu)} = \dfrac{\mathrm{P(Lu/Fe)P(Fe)}}{\mathrm{P(Lu)}} = 0.5$. Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

Exercice 2 : Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Correction :

$$\begin{aligned}
(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4)\\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda) + (\mu, -2\mu, 3\mu, -4\mu)\\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu)\\
&\implies \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad 1 = 2(\lambda-\mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda-\mu)\\
&\implies \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda-\mu = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x, y). Donc on ne peut pas trouver de tels x, y.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$.

On considère $u = (-12, -2, 5)$, $v = (2, -1, 4)$, $w = (5, 0, 1)$.

1. L'un des vecteurs est-il combinaison linéaire des autres ?
2. Définir $\text{vect}\,(u)$ et $\text{vect}\,(v, w)$.
3. Montrer que $\text{vect}\,(u) \oplus \text{vect}\,(v, w) = \mathrm{E}$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si B n'est pas négligeable, alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.*

Exercice 1 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction : La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1-(\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$. On a facilement : $n \geqslant 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1-(\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geqslant 21$.

Exercice 2 : Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v=(-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1=(1,-1,1,2)$ et $e_2=(-1,2,3,1)$?

Correction : $v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ, μ tels que $v=\lambda e_1+\mu e_2$.

Alors $(-2, x, y, 3)=\lambda(1,-1,1,2)+\mu(-1,2,3,1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 & =\lambda-\mu \\ x & =-\lambda+2\mu \\ y & =\lambda+3\mu \\ 3 & =2\lambda+\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & =1/3 \\ \mu & =7/3 \\ x & =13/3 \\ y & =22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y)=(13/3, 22/3)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{F}=\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x-2y+z-t=0\}$.

On considère $\mathrm{G}=\operatorname{vect}(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1=(1,2,-1,0)$, $u_2=(3,0,-1,1)$ et $u_3=(-1,4,-1,-1)$.

1. Calculer $\dim \mathrm{F}$, $\dim \mathrm{G}$, $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$, $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})$.

2 F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Les événements* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* A *et* $\bar{B}$ *sont indépendants, si et seulement si...*

Exercice 1 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction : Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a 20 !.

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo : $\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = 190$ choix ;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a 18! choix.

Il y a au total : $19 \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} (18!)$ choix possibles.

Exercice 2 : Montrer que toute suite de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Montrer que toute suite de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

Correction : Soient n un entier naturel non nul puis $P_1, \dots, P_n$ n polynômes non nuls de degrés respectifs $d_1 < \dots < d_n$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$. Supposons par l'absurde que les λ_i ne soient pas tous nuls et posons $k = \text{Max}\{i \in [\![1\,;n]\!] \,/\, \lambda_i \neq 0\}$. On ne peut avoir $k = 1$ car $P_1 \neq 0$ puis

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_k P_k = -\sum_{i<k} \lambda_i P_i.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\lambda_k P_k$ est un polynôme de degré d_k (car $\lambda_k \neq 0$) et $-\sum_{i<k} \lambda_i P_i$ est un polynôme de degré au plus $d_{k-1} < d_k$. Donc tous les λ_k sont nuls.

La même démarche tient en remplaçant degré par valuation et en s'intéressant à la plus petite valuation au lieu du plus grand degré.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question avec $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Existence d'un supplémentaire en dimension finie.*

Exercice 1 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction :

1. Le taux global de personnes soulagées : $\mathrm{P(S)} = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81.$
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $\mathrm{P(A/S)} = \mathrm{P(A \cap S)/P(S)} = \mathrm{P(A)P(S/A)/P(S)} = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%.$

Exercice 2 : Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Correction :

$$\begin{aligned}
(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{v_1,v_2\} &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= \lambda+\mu \\ 1 &= 2\lambda-2\mu \\ 1 &= 3\lambda+3\mu \\ y &= 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x, 1, 1, y)$ qui convienne est $(\frac{1}{3}, 1, 1, 2)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Théorème de la base incomplète.*

Exercice 1 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Correction :

1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $\mathrm{P(CB/YB)} = \mathrm{P(YB/CB)P(CB)/P(YB)} = \mathrm{P(YB \cap CB)/P(YB)} = \dfrac{0.15}{0.4} = 0.375$.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $\mathrm{P(YB/CB)} = \mathrm{P(YB \cap CB)/P(CB)} = \dfrac{0.15}{0.25} = 0.6$.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $\mathrm{P(non YB/CB)} = 1 - \mathrm{P(YB/CB)} = 0.4$.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles).

On considère les trois éléments de E suivants : $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (\cos(n\theta + b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés.

Montrer que (u, v, w) est une famille liée.

Correction : Soit $u' = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. On a : $u = 1.u + 0.u'$, puis $v = \cos a.u - \sin a.u'$, puis $w = \cos b.u - \sin b.u'$. Les trois vecteurs u, v et w sont donc combinaisons linéaires des deux vecteurs u et u' et constituent par suite une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs constituent une famille liée).

Exercice 3 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x.$

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_B$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction : – Une tenue est un triplet $(\mathrm{P}, \mathrm{T}, \mathrm{C})$: il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes ;

– «Il est tout en noir» : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.

La probabilité de l'événement «Il est tout en noir» est donc : $\dfrac{40}{240} = \dfrac{1}{6}$.

– «Une seule pièce est noire sur les trois » : notons les événements : N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par : $(\mathrm{N}_1 \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \mathrm{N}_2 \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \mathrm{N}_3)$. Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement «une seule pièce est noire sur les trois» est donc : 0.325.

Exercice 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = 1 & \text{si } x = \alpha \\ f_\alpha(x) = 0 & \text{si } x \neq \alpha \end{cases}.$$

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Correction : À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre fini de termes).

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu'à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Exercice 3 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Correction : Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.

1. Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0,0,0)$

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

2. Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\
\iff & \begin{cases} b+c=x \\ a+c=y & (\mathrm{L}_2) \\ a+b=z & (\mathrm{L}_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x & (\mathrm{L}_1') \\ a+c=y \\ b-c=z-y & (\mathrm{L}_3') = (\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2b = x+z-y & (\mathrm{L}_1' + \mathrm{L}_3') \\ a+c=y \\ 2c = x-(z-y) & (\mathrm{L}_1' - \mathrm{L}_3') \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x,y,z) = v$. Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice.

3. La famille est libre et génératrice donc c'est une base.

4. Pour écrire $w = (1,1,1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x,y,z), en particulier pour le vecteur $(1,1,1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3) sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Formule de Grassmann.*

Exercice 1 : Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Correction :

1. Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$
2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à ‹‹choisir›› parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons Par exemple :

$$|\bullet\bullet||\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|$$

les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38 (= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\dfrac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.059\,1 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Exercice 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$.
Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Correction : À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre fini de termes).

Soient $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ des réels distincts que nous avons ordonnés, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\dots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$, autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

Le terme qui domine est $e^{\alpha_1 x}$ (car $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$). Factorisons par $e^{\alpha_1 x}$:

$$e^{\alpha_1 x}\left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x}\right) = 0.$$

Mais $e^{\alpha_1 x} \neq 0$ donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} = 0.$$

Lorsque $x \to +\infty$ alors $e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ (pour tout $i \geqslant 2$, car $\alpha_i - \alpha_1 < 0$). Donc pour $i \geqslant 2$, $\lambda_i e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$\lambda_1 = 0.$$

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

Exercice 3 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ et $w = (1,2,-3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Correction : Notons $\mathcal{B}$ la base (v_1, v_2, v_3).

Exprimons ensuite e_1 dans cette base, les calculs donnent : $e_1 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$e_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

$e_3 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3$. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Les calculs sont ensuite terminés, on remarque que $w = (1,2,-3)$ vaut en fait $w = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ donc par nos calculs précédents $w = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + 2(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3) - 3(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3) = 2v_2 + 3v_3$. Les coordonnées de w dans $\mathcal{B}$ sont $(0,2,3)$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si* B *n'est pas négligeable, alors* $\mathbb{P}_B$ *est une probabilité.*

Exercice 1 : La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?

Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Correction : $P(A \cap B) = pq$ car les maladies sont indépendantes.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - pq$

Exercice 2 : Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$.

$$a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2 \Rightarrow 2ab\sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $ab = 0$.
Si $b = 0$, puisque $a + c = 0$ et que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on en déduit que $c = 0$ (sinon $\sqrt{3}$ serait rationnel) puis $a = 0$ et finalement $a = b = c = 0$.

Si $a = 0$, il reste $2b^2 = 3c^2$. Mais $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est irrationnel (dans le cas contraire, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $3q^2 = 2p^2$ et par exemple l'exposant du nombre premier 2 n'a pas la même parité dans les deux membres de l'égalité ce qui est impossible) et donc $b = c = 0$ puis encore une fois $a = b = c = 0$.

On a montré que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$, $(a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$. Donc la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille de réels $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

Donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Correction : Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.
La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Les événements* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* A *et* $\bar{B}$ *sont indépendants, si et seulement si...*

Exercice 1 : Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants.

J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Correction : L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a $\binom{300}{10}$. Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1 - \frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Exercice 2 :

1. Calculer pour p et q entiers naturels donnés les intégrales suivantes :

$$\mathrm{J}(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx,\ \mathrm{K}(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)\,dx \text{ et}$$
$$\mathrm{L}(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,dx.$$

2. Montrer que la famille de fonctions $(\cos(px))_{p\in\mathbb{N}_{n_0}} \cup (\sin(qx))_{q\in\mathbb{N}^*_{n_0}}$ est libre.

Correction :

1. Pour p et q entiers relatifs, posons $\mathrm{I}(p,q) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x}\,dx$.

   Si $p \neq q$, $\mathrm{I}(p,q) = \dfrac{1}{i(p-q)}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$. Soient alors p et q deux entiers naturels.

Donc si $p \neq q$ $\mathrm{J}(p,q)\frac{1}{2}\mathcal{R}e(\mathrm{I}(p,q)+\mathrm{I}(p,-q)) = 0$ puis $\mathrm{K}(p,q) = \frac{1}{2}\mathcal{I}m(\mathrm{I}(p,-q)-\mathrm{I}(p,q)) = 0$ puis $\mathrm{L}(p,q) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\mathrm{I}(p,-q)-\mathrm{I}(p,q)) = 0$.

Si $p = q$ $\mathrm{J}(p,p) = 2\pi$ si $p = 0$ et π si $p \neq 0$ puis $\mathrm{K}(p,p) = 0$ puis $\mathrm{L}(p,p) = \pi$ si $p \neq 0$ et 0 si $p = 0$.

2 Sur l'espace E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, l'application qui à (f,g) élément de E^2 associe $\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ est classiquement un produit scalaire. La famille de fonctions proposée est une famille orthogonale pour ce produit scalaire et ne contient pas le vecteur nul de E. Cette famille est donc est libre.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(2) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$.

1 Montrer que F et G sont deux plans vectoriels

2 Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Existence d'un supplémentaire en dimension finie.*

Exercice 1 (Inégalité de Bonferroni) :
Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1).$$

Correction : On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Exercice 2 : Soit $f(x) = \ln(1+x)$ pour x réel positif. Soient $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$ et $f_3 = f \circ f \circ f$. Étudier la liberté de (f_1, f_2, f_3) dans $[0, +\infty[^{[0,+\infty[}$.

Correction : Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$.

Soient a, b et c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.

Première solution. Si a est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $a \ln x$ et ne peut donc être égale à la fonction nulle. Donc $a = 0$. Puis si b est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3 = bf_2 + cf_3$ est équivalente à $b \ln(\ln x)$ et ne peut être égale à la fonction nulle. Donc $b = 0$. Puis $c = 0$.

Deuxième solution. On effectue un développement limité à un ordre suffisant de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ quand x tend vers 0 :

$f_1(x) = \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ puis

$$\begin{aligned} f_2(x) = \ln(1+f_1(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} f_3(x) = \ln(1+f_2(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \left(x - x^2 + \frac{7}{6}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x - x^2\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Par suite, $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) \underset{x\to 0}{=} (a+b+c)x + \left(-\dfrac{a}{2} - b - \dfrac{3c}{2}\right)x^2 + \left(\dfrac{a}{3} + \dfrac{7b}{6} + \dfrac{5c}{2}\right)x^3 + o(x^3)$.
L'égalité $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ fournit, par identification des parties régulières des développements limités à l'ordre trois en zéro :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ -\dfrac{a}{2} - b - \dfrac{3c}{2} = 0 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{7b}{6} + \dfrac{5c}{2} \end{array}\right. \text{ ou encore } \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 2a+7b+15c=0 \end{array}\right. .$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, on a donc $a = b = c = 0$.

Exercice 3 : Vrai ou faux ?

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Correction :

1. Faux. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, $z = (1, 1, 0)$.
2. Vrai. Soit une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_p x_p = 0$. Supposons qu'un des coefficient est non nul : par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on écrit $x_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \cdots - \dfrac{\lambda_p}{\lambda_1} x_p$. Donc x_1 est une combinaison linéaire de $\{x_2, \dots, x_p\}$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé, donc tous les coefficients sont nuls. Donc $\{x_1, \dots, x_p\}$ est une famille libre.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Théorème de la base incomplète.*

Exercice 1 : Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

Exercice 2 : Soit $f_a(x) = |x - a|$ pour a et x réels.

Étudier la liberté de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction : Soient n un entier naturel non nul puis $a_1,\dots, a_n$ n réels deux à deux distincts et $\lambda_1,\dots, \lambda_n$ n réels.

Supposons $\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Soit i un élément de $[\![1\,;n]\!]$. On a $\lambda_i f_{a_i} = -\sum_{j\neq i} \lambda_j f_{a_j}$ et on ne peut avoir $\lambda_i \neq 0$ car alors le membre de gauche est une fonction non dérivable en a_i tandis que le membre de droite l'est. Par suite, tous les λ_i sont nuls et donc la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 3 :

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n\}$ avec $\deg \mathrm{P}_i = i$ (pour $i = 0, 1, \dots, n$) forme une base de E.
2. Écrire le polynôme $\mathrm{F} = 3\mathrm{X} - \mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X}^3$ sous la forme $\mathrm{F} = a + b(1-\mathrm{X}) + c(\mathrm{X}-\mathrm{X}^2) + d(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}^3)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ puis sous la forme $\mathrm{F} = \alpha + \beta(1+\mathrm{X}) + \gamma(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) + \delta(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2+\mathrm{X}^3)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.

Correction :

1 Tout d'abord la famille $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ contient $n+1$ vecteurs dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$. Ici un vecteur est un polynôme : P_0 est un polynôme constant non nul, P_1 est un polynôme de degré exactement 1,... Rappelons que lorsque le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre être une famille libre et être une famille génératrice et donc aussi être une base.

Nous allons donc montrer que $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une famille libre. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0.$$

Introduisons l'hypothèse concernant les degrés : $\deg P_0 = 0$, $\deg P_1 = 1$, ..., $\deg P_n = n$. Définissons le polynôme $P(X) = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$.

Nous allons montrer successivement $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$,..., $\lambda_0 = 0$.

Par l'absurde supposons $\lambda_n \neq 0$ et écrivons $P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, comme $\deg P_n(X) = n$ alors $a_n \neq 0$. Maintenant $P(X)$ est aussi un polynôme de degré exactement n qui s'écrit

$$P(X) = \lambda_n \cdot a_n \cdot X^n + \text{termes de plus bas degré}$$

La combinaison linéaire nulle implique que $P(X) = 0$ (le polynôme nul). Donc en identifiant les coefficients devant X^n on obtient $\lambda_n \cdot a_n = 0$ On obtient $a_n = 0$ ou $\lambda_n = 0$. Ce qui est une contradiction. Conclusion $\lambda_n = 0$.

Maintenant la combinaison linéaire nulle s'écrit $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$. Par récurrence descendante on trouve $\lambda_{n-1} = 0$, ..., jusqu'à $\lambda_0 = 0$.

Bilan : $\lambda_0 = 0$, ..., $\lambda_n = 0$ donc la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est libre, elle donc aussi génératrice ; ainsi $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Un point que nous avons utilisé et qu'il est peut-être utile de détailler est le suivant : si un polynôme égal le polynôme nul alors tous ces coefficients sont nul.

Voici une justification : écrivons $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$ et divisons par X^n :

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{X} + \frac{a_{n-2}}{X^2} + \dots + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n} = 0$$

Lorsque l'on fait tendre X vers $+\infty$ alors le terme de gauche tend vers a_n et celui de droite vaut 0 donc par unicité de la limite $a_n = 0$. On fait ensuite une récurrence descendante pour prouver $a_{n-1} = 0$,..., $a_0 = 0$.

Une conséquence est que si deux polynômes sont égaux alors leurs coefficients sont égaux. Et une autre formulation est de dire que $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Montrer que si B n'est pas négligeable, alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.*

Exercice 1 : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Correction : Soit A : l'événement ‹‹tirer un roi›› et B : ‹‹tirer un pique››.

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}; P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}; P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$.

Donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et donc les événements A et B sont indépendants.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{52} = \dfrac{4}{13}$.

Exercice 2 :

1. Soient $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,2)$ et $v_3 = (3,3,6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. On considère deux plans vectoriels

$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

trouver un vecteur directeur de la droite $D = P_1 \cap P_2$ ainsi qu'une équation paramétrée.

Correction :

1.

$$\begin{aligned}
&\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0\\
\iff &\alpha(2,1,4) + \beta(1,-1,2) + \gamma(3,3,6) = (0,0,0)\\
\iff &\Big(2\alpha + \beta + 3\gamma, \alpha - \beta + 3\gamma, 4\alpha + 2\beta + 6\gamma\Big) = (0,0,0)\\
\iff &\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0\\ \alpha - \beta + 3\gamma &= 0\\ 4\alpha + 2\beta + 6\gamma &= 0 \end{cases}\\
\iff &\cdots \qquad \text{(on résout le système)}\\
\iff &\alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Si l'on prend $t = 1$ par exemple alors $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ donne bien $-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Cette solution n'est pas unique, les autres coefficients qui conviennent sont les $(\alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2 Il s'agit donc de trouver un vecteur $v = (x, y, z)$ dans P_1 et P_2 et donc qui doit vérifier $x - y + z = 0$ et $x - y = 0$:

$$\begin{aligned}
& v = (x, y, z) \in \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \\
\Longleftrightarrow\ & x - y + z = 0 \text{ et } x - y = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \cdots \qquad \text{(on résout le système)} \\
\Longleftrightarrow\ & (x = t, y = t, z = 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc, si l'on fixe par exemple $t = 1$, alors $v = (1, 1, 0)$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle D, une équation paramétrique étant $\mathrm{D} = \{(t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \{(x + y - 2z,\ y + 5z,\ 3x + y + z,\ x + y + z),\quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

1 Montrer que E est un espace vectoriel.

2 En donner une base.

Probabilités et espaces vectoriels de dimension finie

Question de cours : *Formule de Grassmann.*

Exercice 1 : Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes; puis, on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{G}_n)$.

On note $v_n = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}_n})$.

1. Écrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n.

   Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Correction :

1. $u_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}/\mathrm{G}n)\mathrm{P}(\mathrm{G}n) + \mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}/\overline{\mathrm{G}_n})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$.

   $v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$.

   Donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

   Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1-u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \dfrac{3}{7}$. Donc $u_n = \dfrac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \dfrac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.

Exercice 2 : On pose $f_a(x) = e^{ax}$ pour a et x réels.

Étudier la liberté de la famille de fonctions $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction : Soient $a_1 < \dots < a_n$ n réels deux à deux distincts et $\lambda_1,\dots, \lambda_n$ n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0 \ (*)$.

Première solution. Après multiplication des deux membres de $(*)$ par $e^{-a_n x}$ puis passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$. En réitérant, on obtient donc $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_1 = 0$.

Deuxième solution. On note f la fonction apparaissant au premier membre de $(*)$.

$$\begin{aligned} f = 0 &\Rightarrow \forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\ f^{(k)}(0) = 0 \\ &\Rightarrow \forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\ \lambda_1 a_1^k + \dots + \lambda_n a_n^k = 0. \end{aligned}$$

Le système précédent d'inconnues λ_i, $1 \leqslant n$, est un système linéaire homogène à n équations et n inconnues. Son déterminant est le déterminant de Vandermonde des a_i et est non nul puisque les a_i sont deux à deux distincts. Le système est donc de Cramer et admet l'unique solution $(0, \ldots, 0)$.

Troisième solution. (dans le cas où on se restreint à démontrer la liberté de la famille $(x \mapsto e^{nx})_{n \in \mathbb{N}_{n_0}}$).
Soient $n_1 < \ldots < n_p$ p entiers naturels deux à deux distincts. Supposons que pour tout réel x on ait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{n_i x} = 0$. On en déduit que pour tout réel strictement positif t, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{n_i} = 0$ et donc le polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}^{n_i}$ est nul (car a une infinité de racines) ou encore les coefficients du polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}^{n_i}$ à savoir les λ_i sont tous nuls.

Quatrième solution. (pour les redoublants) L'application φ qui à f de classe C^∞ fait correspondre sa dérivée est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour a réel donné, $\varphi(f_a) = af_a$ et la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est constituée de vecteurs propres de φ (les f_a sont non nulles) associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On sait qu'une telle famille est libre.

Exercice 3 : Projection et symétrie dans K^3

Dans K^3, on donne les sous espaces : $\begin{cases} \mathrm{H} = \{\overrightarrow{\mathrm{X}} = (x, y, z) \text{ tq } x + y + z = 0\} \\ \mathrm{K} = \mathrm{vect}(\overrightarrow{\mathrm{U}} = (1, 1, 2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim \mathrm{H}$ et en donner une base.
2. Démontrer que $\mathrm{H} \oplus \mathrm{K} = \mathrm{K}^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_{H} et s_{H}.

Correction :

3. π_{H} :

$$\begin{cases} 4x' = 3x - y - z \\ 4y' = -x + 3y - z \\ 4z' = -2x - 2y + 2z, \end{cases}$$

s_{H} :

$$\begin{cases} 2x' = x - y - z \\ 2y' = -x + y - z \\ 2z' = -2x - 2y. \end{cases}$$