XXVII

Applications linéaires

Contenu

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ réduit à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Isomorphismes en dimension finie

Rappel 1 : Dans le contexte général une application $f : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{Y}$ est bijective si, et seulement si il existe $g : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ une application telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f.

De plus, $f^{-1} : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ est bijective d'inverse f.

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la proposition (4) , que :
- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$, est surjective.

I.1 Groupe linéaire

Rappel 2 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ leur ensemble.

- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

Proposition 1 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$$f \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \iff f^{-1} \in \mathcal{I}som\,(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})\,.$$

Vocabulaire : Deux espaces vectoriels sont dit *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Preuve : Soit $f \in \mathscr{L}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ bijective. L'application $f^{-1} : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ existe.
Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y_1,\ y_2 \in \mathrm{F}$.
Comme f est surjective, on peut poser $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ où $(x_1\,;x_2) \in \mathrm{E}^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{surj. de } f}}{=} f^{-1}(\lambda f(x_1) + f(x_2)) \underset{\substack{\uparrow\\ f\in\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}}{=} f^{-1}(f(\lambda x_1 + x_2)) \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{def de } \circ}}{=} (f^{-1}\circ f)(\lambda x_1 + x_2) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{prop. de } f^{-1}}}{=} \lambda x_1 + x_2 \underset{\substack{\uparrow\\ f \text{ bijective}}}{=} \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2).
\end{aligned}$$

On en déduit que f^{-1} est bien linéaire.

La réciproque est évidente en considérant f^{-1} d'inverse f.

Exemples 1 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec pour isomorphisme :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

  C'est cet isomorphisme qui permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de façon légèrement abusive, mais transparente.

- $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} \text{Suites géométriques} \\ \text{de raison } q \neq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un isomorphisme.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto u_0$$

Corollaire I.1 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
2. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme :

$$\forall f \in \mathcal{I}som(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}),\ g \in \mathcal{I}som(\mathrm{F}\,;\mathrm{G}),\ f \circ g \in \mathcal{I}som(\mathrm{E}\,;\mathrm{G}) \quad \text{et} \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Preuve :

1. C'est la proposition (1).
2. La composée de deux applications linéaires est linéaire.

   Pour f et g bijectives, on sait depuis longtemps que $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

Exemple 2 (Isomorphisme en analyse) : Soient $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.
Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Alors :

1. $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.
2. Pour tout réel t_0, l'application $\mathrm{T}_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0)\,;y'(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$ puisqu'elle est linéaire et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 1 : Montrer que l'application $\mathrm{S} : f \longmapsto (f', f(0))$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ sur $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Définition/Théorème 1 (Groupe linéaire) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé *groupe linéaire de* E et noté $\mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

Preuve :

1. La composée de deux automorphismes est un automorphisme i.e. $\circ : \mathscr{G}l(\mathrm{E}) \times \mathscr{G}l(\mathrm{E}) \longmapsto \mathscr{G}l(\mathrm{E})$ est une loi de composition interne.
2. La composition des applications est toujours associative.
3. La loi $\circ$ admet un élément neutre : Id_{E} qui est bien un automorphisme.
4. Chaque automorphisme f admet un symétrique pour $\circ$ i.e. une réciproque f^{-1} qui est encore un automorphisme.

Exemples 3 :

- $(x\,;y) \longmapsto (x+y\,;x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Les homothéties non nulles $\lambda.\mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \neq 0$ sont des automorphismes de E avec $(\lambda.\mathrm{Id}_E)^{-1} = \lambda^{-1}.\mathrm{Id}_E$.
- Les symétries $s \in \mathscr{L}(E)$ *i.e.* $s^2 = \mathrm{Id}_E$ sont des automorphismes de E tels que $s^{-1} = s$.

Exercice 2 : Montrer que l'application suivante est un automorphisme et expliciter son automorphisme réciproque.

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+4z \\ x+y-z \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

I.2 Isomorphismes et bases

Lemme 1 (Lemme de transport) : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie.

L'image de toute famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Preuve : Comme E est de dimension finie, on peut considérer une famille génératrice finie de E que l'on note $\mathscr{F} = (e_1, \dots e_p)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe un antécédent $x \in E$ que l'on décompose dans la famille $\mathscr{F}$ pour obtenir :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) \in \mathrm{vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right) = \mathrm{vect}\left(f(\mathscr{F})\right).$$

Exercice 3 : Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2z \\ -x-z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Théorème 2 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie.

1. f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
2. f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.
3. f est bijective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une base de F.

Preuve : Considérons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et posons $\mathcal{F} = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$

1 ($\Rightarrow$) : Supposons que f soit injective.

Considérons une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{F}$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$.

Par linéarité, on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0$.

Par injectivité, on déduit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.

Par indépendance linéaire de la base $\mathcal{B}$, on en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$: $\mathcal{F}$ est bien libre.

($\Leftarrow$) : Supposons que $\mathcal{F}$ soit libre.

Montrons que f est injective en déterminant son noyau : soit $x \in \ker(f)$.

Décomposons x sur la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

On a $0 = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

Or, la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ étant libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Par suite, $x = 0$ i.e. $\ker(f) = \{0\}$ et f est bien injective.

2 Cela ressemble beaucoup à la démonstration du lemme (1) :

($\Rightarrow$) : Supposons que f soit surjective.

Considérons $y \in \mathrm{F}$.
Par surjectivité, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.

Décomposons x sur la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Par linéarité, on a $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ i.e. $\mathcal{F}$ est bien génératrice.

($\Leftarrow$) : Supposons que $\mathcal{F}$ soit génératrice.

Montrons que f est surjective en trouvant un antécédent à $y \in \mathrm{F}$.

Comme $\mathcal{F}$ est génératrice, on peut y décomposer y : $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

En posant $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{E}$, par linéarité de f, on a $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = f(x)$ i.e. f est bien surjective.

3 Conséquence des deux points précédents.

Remarque : Il n'est nulle part besoin que F soit de dimension finie ou possède une base. Tout dépend de E.

Exemple 4 (Important) : Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Comme $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{Im}(f)$ est surjective, on déduit de la propriété précédente que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Ainsi, on retrouve :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))\,.$$

Exercice 4 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x, y) \longmapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.
2. $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P} - \mathrm{XP}' - \mathrm{P}(0)$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dans lui-même.

Corollaire 21 : Si deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

Preuve : Considérons un isomorphisme f de E sur F.

L'image d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E est une base de F.

Mais cette image est $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$.

Elle compte autant d'éléments que $\mathcal{B}$: les dimensions de E et F sont égales.

Théorème 3 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors :

(i) f est surjective $\iff$ (ii) f est injective $\iff$ (iii) f est bijective.

Preuve : Notons n la dimension de E et F.

- On a clairement $(iii) \implies (i) \wedge (ii)$.
- $(ii) \implies (i)$: Supposons f injective. L'image de toute base de E est donc une famille libre de F de même cardinal que $\dim(\mathrm{F})$. C'en est une base et f, transformant toute base de E en une base de F, est donc bijective.
- $(iii) \implies (i)$: En supposant f surjective, le raisonnement est identique avec l'image d'une base de E qui est une famille génératrice de F de même cardinal que sa dimension.

Méthode 1 (Montrer qu'un endomorphisme est bijectif en dimension finie) :
Pour montrer qu'un endomorphisme de E est bijectif il suffit de montrer que f est injectif (en montrant par exemple que $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$) ou que f est surjectif (en montrant $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{F}$).

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) : Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(\alpha_0), \mathrm{P}(\alpha_1), \dots, \mathrm{P}(\alpha_n)) \end{array}.$$

Alors :

1. φ est linéaire.
2. φ est bijective car aisément injective entre deux espaces de même dimension $n+1$.
3. L'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'est autre que la base des polynômes de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ associée à $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$:

$$\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}.$$

Toute fonction définie sur un ensemble contenant les α_j coïncide en chacun de ces $(n+1)$ points avec le polynôme défini par :

$$P = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i) L_i.$$

Exercice 5 : Montrer que $P \longmapsto \big(P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

Proposition 4 : Soient E et F deux K-espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : E \longmapsto F$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. f est inversible à gauche *i.e.* $\exists\, g \in \mathscr{L}(F\,;E),\ g\circ f = \mathrm{Id}_E$.
3. f est inversible à droite *i.e.* $\exists\, h \in \mathscr{L}(F\,;E),\ f\circ h = \mathrm{Id}_F$.

De plus, les inverses à gauche et à droite coïncident nécessairement avec f^{-1}.

Preuve : On a déjà $\boxed{1} \implies \boxed{2}$ et $\boxed{1} \implies \boxed{3}$, puisque si f est bijective, alors $g = f^{-1}$ est linéaire et convient.

Montrons que $\boxed{2} \implies \boxed{1}$.

Supposons qu'il existe $g \in \mathscr{L}(F\,;E)$, $g\circ f = \mathrm{Id}_E$. On sait alors que f est injective.

Comme E et F sont de même dimension finie, d'après le théorème (3), f est donc bijective.

On montre de même que $\boxed{3} \implies \boxed{1}$.

Enfin, en composant $g\circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f\circ h = \mathrm{Id}_F$ respectivement à droite et à gauche par f^{-1}, on a bien $g = h = f^{-1}$.

Moralité : En dimension finie, l'existence d'un inverse à gauche ou à droite suffit à l'existence d'un inverse et, dans tous les cas, c'est le même.

ATTENTION

Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie.

En effet, la dérivation D, par exemple, a un inverse à droite tel que $D\circ P = \mathrm{Id}_E$, mais on a $P\circ D \neq \mathrm{Id}_F$.

En particulier, D n'est pas un isomorphisme.

I.3 Espaces isomorphes

Rappel 3 : On dit que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Une mathématicienne à son ami :

- Es-tu fidèle ?

- Oui, à isomorphisme près.

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On considère l'application
$$\phi_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est injective ;
- $\mathcal{F}$ est une base de E $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est bijective ;

Preuve : La démonstration ressemble énormément à celle du théorème (2). On l'écrit différemment :

– $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire car pour tous $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p), (\mu_1, \cdots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{F}}\left(\alpha(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) + (\mu_1, \cdots, \mu_p)\right) &= \phi_{\mathcal{F}}\left((\alpha\lambda_1 + \mu_1, \cdots, \alpha\lambda_p + \mu_p)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\alpha\lambda_i + \mu_i) x_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i \\ &= \alpha\phi_{\mathcal{F}}\left((\lambda_1, \cdots, \lambda_p)\right) + \phi_{\mathcal{F}}\left((\mu_1, \cdots, \mu_p)\right) \end{aligned}$$

– $\operatorname{Im} \phi_{\mathcal{F}} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\} = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ est génératrice} &\iff \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E \\ &\iff \operatorname{Im} \phi_{\mathcal{F}} = E \\ &\iff \phi_{\mathcal{F}} \text{ est surjective} \end{aligned}$$

– $\ker \phi_{\mathcal{F}} = \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \right\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ est libre} &\iff \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0\right\} = \{(0, \cdots, 0)\} \\ &\iff \ker \phi_{\mathcal{F}} = \{(0, \cdots, 0)\} \\ &\iff \phi_{\mathcal{F}} \text{ est injective} \end{aligned}$$

Corollaire 5.1 :

1. Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
2. Deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie sont isomorphes.

Preuve :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.

   Alors, $\phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to \mathrm{E}$ est une application linéaire bijective, donc un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E.

   Ces deux espaces sont donc isomorphes.
2. Deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie n sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi \circ \psi^{-1}"'] & & \mathbb{K}^n \\ & \mathrm{F} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Ils sont donc isomorphes entre eux (par composition d'isomorphismes).

Théorème 6 : Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.

Méthode 2 (Montrer qu'un espace est de dimension finie) :

Pour montrer que E est de dimension finie n, on dispose de deux méthodes :

- exhiber une base de n vecteurs.
- exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n.

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes

- L'ensemble $\mathscr{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $ay'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$ de dimension 2, puisqu'on a vu que l'application :

$$\mathrm{T}_0 : \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0)\,;y'(t_0)) \end{array}$$

  est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.
- L'ensemble $\mathscr{S}_2$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 *i.e.* vérifiant une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2 en considérant l'isomorphisme :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0\,;u_1) \end{array}$$

II Définition d'une application linéaire

Exemple 7 : Soit E un espace de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, l'application $\varphi_i : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}} & \longmapsto & x_i \end{array}$ est une forme linéaire appelée fonction $i^{\text{ème}}$ *coordonnée*.

En particulier, $\forall\,(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;n]\!]$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

II.1 À partir de l'image d'une base

Théorème 7 : On considère E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(\mathrm{E}) = n$.

Pour toute **base** $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et toute famille $\mathscr{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad g(e_i) = f_i.$$

Preuve : On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'une telle application linéaire $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ existe.

$$\text{Pour tout } x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \in \mathrm{E}, \text{ on a :}$$

$$g(x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n) = x_1 \cdot g(e_1) + \dots + x_n \cdot g(e_n) = x_1 \cdot f_1 + \dots + x_n \cdot f_n.$$

Ainsi, on a $g = \varphi_1 \cdot f_1 + \dots + \varphi_n \cdot f_n$ où $\varphi_i : (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E} \longmapsto x_i \in \mathbb{K}$ est la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée.

Synthèse : Posons $g : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \cdot f_k \end{array}$

g **est-elle une application ?** Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on associe par g un unique vecteur $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \cdot f_k$.

La fonction g est donc bien une application.

g **vérifie-t-elle la condition sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$?** Par construction, $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(e_i) \cdot f_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} \cdot f_k = f_i.$$

g **est-elle linéaire ?** Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in \mathrm{E}$. On a :

$$g(\lambda x + y) = \varphi_1(\lambda x + y) \cdot f_1 + \ldots + \varphi_n(\lambda x + y) \cdot f_n$$

Par linéarité des φ_k, $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}&= \lambda(\varphi_1(x) \cdot f_1 + \ldots + \varphi_n(x) \cdot f_n) + \varphi_1(y) \cdot f_1 + \ldots + \varphi_n(y) \cdot f_n\\ &= \lambda g(x) + g(y).\end{aligned}$$

Donc $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

g **est-elle unique ?** Considérons deux applications linéaires g_1 et g_2 de (E, F) coïncidant sur la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire vérifiant $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $g_1(e_i) = g_2(e_i) = f_i$.

Tout $x \in \mathrm{E}$ se décompose de manière unique sur la base $\mathcal{B}$: $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k$.

Comme g_1 est linéaire, on a $g_1(x) = g_1\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot g_1(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k$.

Et, par le même raisonnement, $g_2(x) = g_2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot g(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k$.

On a donc prouvé que $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $g_1(x) = g_2(x)$ i.e. g_1 et g_2 coïncident sur tout l'espace E : ces applications sont égales.

À retenir I :

Corollaire 7.1 :

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Exemple 8 : Considérons l'ensemble P des vecteurs du plan muni d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

La donnée de $f\left(\vec{i}\right) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f\left(\vec{j}\right) = \vec{i} + \vec{j}$ suffit à définir $f \in \mathscr{L}(\mathrm{P})$.

Par exemple, si $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, on a $f(\vec{u}) = \ldots$

Proposition 8 : Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F}).$$

Preuve : On note $n = \dim(\mathrm{E})$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathrm{F}^n \\ & f & \longmapsto & (f(e_1), \dots, f(e_n)). \end{array}$$

D'après le théorème (7), l'application φ est bijective

On vérifie qu'elle est, de plus, linéaire sans difficulté. C'est donc un isomorphisme, et on peut conclure que :

$$\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})) = \dim(\mathrm{F}^n) = n \times \dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F}).$$

Exemple 9 (Dimension du dual en dimension finie) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

L'ensemble $\mathrm{E}^* = \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E a donc même dimension que E.

Exercice 6 : Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les applications coordonnées correspondantes.

Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*, appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

II.2 À partir d'espaces supplémentaires

Proposition 9 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$;

Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Preuve : Posons $f_{|\mathrm{E}_1}$ et $f_{|\mathrm{E}_2}$ les restrictions respectives de f à E_1 et E_2.

Soit $x \in \mathrm{E}$ qui se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $(x_1 ; x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.

Comme $f(x_1) = f_{|\mathrm{E}_1}(x_1)$ et $f(x_2) = f_{|\mathrm{E}_1}(x_2)$ sont totalement déterminés par l'image d'une base de E_1 et E_2 respectivement, par linéarité, il en est de même de

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_{|\mathrm{E}_1}(x_1) + f_{|\mathrm{E}_2}(x_2).$$

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$.

1. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{0\}$.
2. Simplifier $(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

   En déduire que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \ker(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
4. Prouver que $\mathrm{E} = \ker(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$

Aide : $\mathrm{Id}_\mathrm{E} = (f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) - (f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

III Rang d'une application linéaire

III.1 Généralités

Définition 2 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
On appelle *rang de f* la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$:

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(f))\,.$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\mathrm{rg}\,\left(0_{\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}\right) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$ alors $\mathrm{rg}\,(p_1) = 1$.
- Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\mathrm{rg}\,(\varphi) = 1$.
- Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{rg}\,(p) = \dim\,(\mathrm{F})$.
- Si E est de dimension finie et $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{rg}\,(\lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = \dim\,(\mathrm{E})$.

Théorème 10 (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

$$\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min\,(\dim\,(\mathrm{E})\,;\dim\,(\mathrm{F}))\,.$$

Plus précisément :

1. Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \dim\,(\mathrm{F})$, avec égalité si, et seulement si f est surjective.
2. Si E est de dimension finie, f est de rang fini et $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \dim\,(\mathrm{E})$, avec égalité si, et seulement si f est injective.

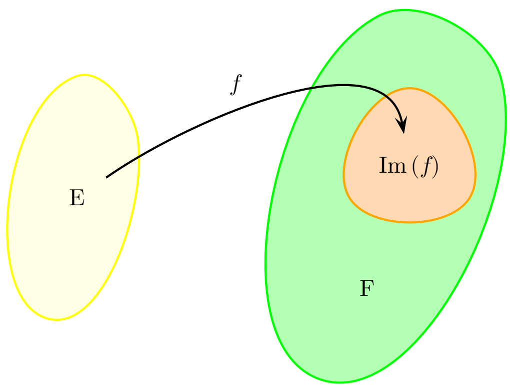

Figure XXVII.1 – En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

Preuve :

1. Par définition, $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sev de F donc $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim\,(\mathrm{F})$.

   De plus, f est surjective si, et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{F}$ i.e. $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim\,(\mathrm{F})$

2. Si E est de dimension finie, on peut en considérer une base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et on sait que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\,\Big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\Big).$$

   Il est alors assez clair que

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim\,\Big(\mathrm{vect}\,\Big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\Big)\Big) \leqslant n = \dim\,(\mathrm{E})\,.$$

   Avec égalité si, et seulement si $\Big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\Big)$ est une base de F i.e. l'image d'une base par f est une famille libre ce qui est équivalent à dire que f est injective.

Des deux assertions, on tire, bien évidemment, $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min\,(\dim\,(\mathrm{E})\,; \dim\,(\mathrm{F}))$.

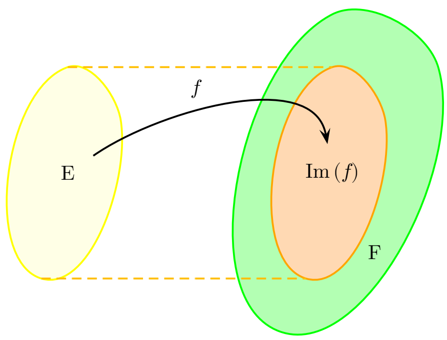

Figure XXVII.2 – f est injective si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{E})$.

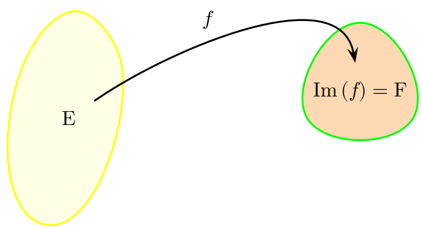

Figure XXVII.3 – f est surjective si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{F})$.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $\mathrm{E} = \ker\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) \iff \mathrm{E} = \ker\,(f) + \mathrm{Im}\,(f) \iff \ker\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

III.2 Rang d'une composée

Proposition 11 : Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev. On considère $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Alors :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \min\,(\mathrm{rg}\,(f)\,; \mathrm{rg}\,(g))\,.$$

Preuve :

- Par définition, $\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f))$.

  Or $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$ donc $\dim\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f)) \leqslant \dim\,(\mathrm{Im}\,(g))$, i.e. $\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\,(g)$.
- Considérons $\tilde{g} : \mathrm{Im}\,(f) \longmapsto \mathrm{E}$, la restriction de g à $\mathrm{Im}\,(f)$.

  On a $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ et

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}\,(\tilde{g} \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\,(\tilde{g}) \leqslant \dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rg}\,f.$$

Donc, $\mathrm{rg}\,(g\circ f)\leqslant \min\,(\mathrm{rg}\,(f)\,;\mathrm{rg}\,(g))$.

Exercice 9 (Inégalité triangulaire) : On considère deux endomorphismes f et g d'un espace E de dimension finie.

Établir que $|\mathrm{rg}\,(g)-\mathrm{rg}\,(f)|\leqslant \mathrm{rg}\,(g+f)\leqslant \mathrm{rg}\,(g)+\mathrm{rg}\,(f)$.

Proposition 12 : Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-ev et $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Si $u\in\mathscr{L}\,(\mathrm{G}\,;\mathrm{E})$ et $v\in\mathscr{L}\,(\mathrm{F}\,;\mathrm{H})$ sont des **isomorphismes** alors :

$$\mathrm{rg}\,(f)=\mathrm{rg}\,(f\circ u)=\mathrm{rg}\,(v\circ f).$$

Le rang est inchangé par isomorphisme.

Preuve :

- D'après la proposition (11), on a déjà $\mathrm{rg}\,(f\circ u)\leqslant \mathrm{rg}\,(f)$.

  Si u est un isomorphisme, on peut écrire $f=(f\circ u)\circ u^{-1}$.

  D'où $\mathrm{rg}\,(f)\leqslant \mathrm{rg}\,(f\circ u)$ et l'égalité.
- D'après la proposition (11), $\mathrm{rg}\,(v\circ f)\leqslant \mathrm{rg}\,(f)$.

  Si v est un isomorphisme, on peut écrire $f=v^{-1}\circ(v\circ f)$.

  D'où $\mathrm{rg}\,(f)\leqslant \mathrm{rg}\,(v\circ f)$ et l'égalité.

III.3 Théorème du rang

Théorème 13 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On considère $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Tout supplémentaire de $\ker\,(f)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}\,(f)$.

En particulier,

$$\dim\,(\ker\,(f))+\mathrm{rg}\,(f)=\dim\,(\mathrm{E})\,.$$

Preuve : Considérons un supplémentaire H de $\ker\,(f)$ dans E de sorte que $\mathrm{E}=\mathrm{H}\oplus\ker\,(f)$.

Notons $g=f|_{\mathrm{H}}^{\mathrm{Im}(f)}$ ou en d'autres termes, $g:\begin{array}{ccc}\mathrm{H} & \longrightarrow & \mathrm{Im}\,(f)\\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}$ Montrons que g est un isomorphisme.

- Montrons que g est surjective :

  Soit $y\in\mathrm{Im}\,(f)$. Alors il existe $x\in\mathrm{E}$ tel que $f(x)=y$.

  Comme $\mathrm{E}=\mathrm{H}\oplus\ker\,(f)$, on peut écrire $x=x_1+x_1'$ avec $x_1\in\mathrm{H}$ et $x_1'\in\ker\,(f)$.

  On a alors $y=f(x)=f(x_1+x_1')=f(x_1)+f(x_1')=f(x_1)=g(x_1)$.

Donc $y \in \operatorname{Im}(g)$ et g est bien surjective.

- Montrons que g est injective.

  Considérons un vecteur $x \in \ker(g)$ i.e. $0 = g(x) = f(x)$ donc $x \in \ker(f)$.

  Par construction, x était élément de de H donc $x \in \mathrm{H} \cap \ker(f)$ deux espaces qui sont en somme directe.

  Donc, $x = 0$.

  On en déduit que $\ker(g) = \{0\}$ et donc que g est injective.

- D'après le raisonnement précédent, l'application g est donc un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im}(f)$.

  Ces deux espaces sont donc isomorphes, et donc $\dim(\mathrm{H}) = \dim(\operatorname{Im}(f))$.

  D'autre part, $\mathrm{H} \oplus \ker(f) = \mathrm{E}$ donc $\dim(\mathrm{H}) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathrm{E})$.

  Finalement, on en déduit : $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathrm{E})$.

Remarques :

1. La dimension de l'image $\operatorname{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**.

   C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\mathrm{E})$ et $\dim(\operatorname{Im}(f))$.
2. La dimension de l'**espace d'arrivée** n'intervient pas.
3. Cette formule permet de trouver $\dim(\mathrm{E})$, $\operatorname{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connait, on peut en déduire la $3^{\text{ème}}$.
4. Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
   - Il n'existe pas de d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
   - Il n'existe pas de d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 :

1. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.
   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.
   b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (2x + y - z, x - y)$.
2. Déterminer une base du noyau, et une base de l'image pour chacune d'elles.

ATTENTION

Il s'agit d'une égalité de dimension, pas d'espaces ! On n'a pas, en général, $\mathrm{E} = \operatorname{Im}(f) \oplus \ker(f)$: $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.

- En général, ils ne sont même pas dans le même espace ($\ker(f) \subset \mathrm{E}$ et $\operatorname{Im}(f) \subset \mathrm{F}$) !
- Même lorsque f est un endomorphisme, on n'a pas nécessairement $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathrm{E}$!

  Par exemple, pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0). \end{array}$ On a $\ker(f) = \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}(1;0)$: $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Corollaire 13.1 (Caractérisation des isomorphismes) :

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

2. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension **finie** et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

$$\ker(f) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{E} \iff \mathrm{rg}\, f = \dim(\mathrm{E}) \iff f \in \mathscr{G}l(\mathrm{E})$$

ATTENTION

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie !

Contre-Exemples 11 :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, x-y) \end{array}$ est linéaire, injective, mais non surjective.
- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP} \end{array}$ est un endomorphisme injectif, mais non surjectif.
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}$ est un endomorphisme surjectif, mais non injectif.

Exercice 11 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné).

Soit φ l'application définie par :

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

IV FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

IV.1 Équations linaires

Rappel 4 :

- On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
  - $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.
  - $b \in \mathrm{F}$, appelé second membre de l'équation.
  - $x \in \mathrm{E}$, un vecteur quelconque.
- On appelle *équation homogène* associée à $f(x) = b$ l'équation linéaire $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.

Proposition 14 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$, une application linéaire.

1. L'ensemble $(\mathscr{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$ est $\ker(f)$.
2. L'ensemble $(\mathscr{S})$ des solution de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si $b \in \mathrm{Im}(f)$ et, dans ce cas :
$$(\mathscr{S}) = x_0 + (\mathscr{S}_0),$$
où x_0 est une solution *particulière* de $f(x) = b$.

Preuve : *Le premier point est évident. Montrons le deuxième point.*

Nécessairement $(\mathcal{S}) \neq \varnothing \iff b \in \operatorname{Im}(f)$.

Réciproquement, si $b \in \operatorname{Im}(f)$ *alors il existe* $x_0 \in \mathrm{E}$, *une solution particulière, tel que* $f(x_0) = b$.

Dès lors, on a :

$$\begin{aligned} x \in (\mathcal{S}) &\iff f(x) = b = f(x_0) \iff f(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \ker(f) \\ &\iff x \in x_0 + \ker(f) = x_0 + (\mathcal{S}_0). \end{aligned}$$

Remarque : Si f est bijective, liquation linéaire $f(x) = b$ admet une unique solution.

Exemples 12 :

- Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

  est une équation linéaire $f(\mathrm{X}) = \mathrm{B}$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = (b_1, \dots, b_n).$$

- Les droites, les plans de l'espace sont caractérisés par une équation linéaire.
  - $(\mathscr{P}) = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \Phi(x\,;y\,;z) = 0_{\mathbb{R}}\} = \Phi^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ où

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & x + y + z \end{array}$$

  - $(\mathscr{D}) = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \varphi(x\,;y\,;z) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \varphi^{-1}(0_{\mathbb{R}^2})$ où

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y \end{pmatrix} \end{array}$$

- Toute équation différentielle linéaire d'ordre un $y' + a(t)y = b(t)$ peut être interprétée comme une équation linéaire $f(y) = b(t)$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array} \quad \text{et} \quad b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}).$$

IV.2 Hyperplans

Rappel 5 : Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).
On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
On note $E^* = \mathscr{L}(E\,;\mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition 3 (Hyperplan) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle *hyperplan* de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E.

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \longmapsto 0_E$ est E tout entier.

Exemples 13 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \longmapsto 2x + y - z$.
- L'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, P'(1) + P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, noyau de la forme linéaire non nulle $P \longmapsto P'(1) + P(0)$.

  On voit moins bien ici que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a, b, c, d de P : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, H est décrit par l'équation $3a + 2b + c + d = 0$.
- L'ensemble $\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, f'(0) = f(0)\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, noyau de la forme linéaire non nulle $f \longmapsto f(0) - f'(0)$.

  Ici, $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E.
2. H est supplémentaire d'une droite de E.

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

Exemples 14 : En dimension 3, les hyperplans sont des plans et en dimension 2, les hyperplans sont des droites.

Preuve :

$\boxed{2} \Longrightarrow \boxed{1}$ Par hypothèse, $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$ pour un certain $v \in E$ non nul.

Notons alors φ l'unique forme linéaire de E pour laquelle $\varphi_{|H} = 0_{\mathscr{L}(H,\ \mathbb{K})}$ et $\varphi(v) = 1$.

Une telle forme linéaire existe et est unique d'après le théorème de détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

Il est clair que φ est non nulle et tout aussi clair que $\ker(\varphi) = \mathrm{H}$, donc H est bien un hyperplan de E.

1 $\Longrightarrow$ 2 Donnons-nous une forme linéaire non nulle φ de noyau H et, φ étant non nulle, un vecteur v de $\mathrm{E} \setminus \ker(\varphi)$.

Nous allons montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(v)$.

Comme $\mathrm{H} \cap \mathrm{vect}(v) = \{0_{\mathrm{E}}\}$, nous n'avons qu'à montrer l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{H} + \mathrm{vect}(v)$.

Soit $x \in \mathrm{E}$.

Par définition de v, $\varphi(v) \neq 0$ et on a :

$$\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = 0.$$

En d'autres termes $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v \in \ker(\varphi) = \mathrm{H}$ i.e. $x \in \mathrm{H} + \mathrm{vect}(v)$.

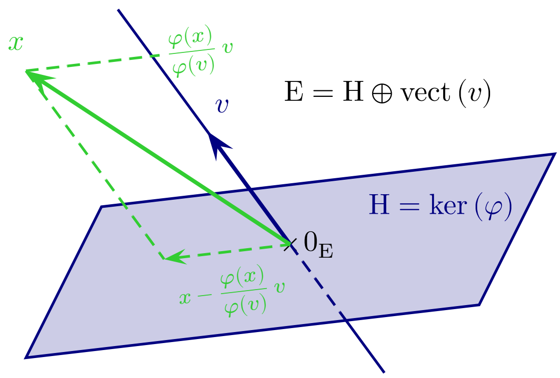

Figure XXVII.4 – $\mathbb{R}^3$ est engendré par une droite et un plan ne la contenant pas.

Exemples 15 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[\mathrm{X}]$.
- $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, noyau de la $(n+1)^{\text{ème}}$ forme coordonnée.
- La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

  L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ dans ce cas) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 16 :

- L'ensemble $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x + y = z + t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4 - 1 = 3$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle
$$(x,y,z,t) \longmapsto 2x + y - z - t.$$
- L'ensemble $\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ de dimension $5 - 1 = 4$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle
$$\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(1) - \mathrm{P}(0).$$

Exercice 12 : Soit H un hyperplan de E de dimension finie.

Montrer que, pour tout $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$, $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathbb{K}.a$.

Théorème 16 (Comparaison des équations d'un hyperplan) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau. Alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\mathrm{H} = \ker(\varphi) = \ker(\psi) \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \psi = \lambda\varphi.$$

Preuve : Supposons que $\mathrm{H} = \ker(\varphi) = \ker(\psi)$, et soit $v \notin \mathrm{H}$.

On sait qu'alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{vect}(v)$.

En particulier, $\varphi(v) \neq 0$ et on peut alors poser $\lambda = \dfrac{\psi(v)}{\varphi(v)}$.

Il reste à montrer que $\psi = \lambda\varphi$.

Les formes linéaires $\lambda\varphi$ et ψ coïncident sur H, et en v donc sur $\mathrm{vect}(v)$.

Elles sont donc égales sur E tout entier, et on a bien $\psi = \lambda\varphi$.

Exercice 13 : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et en déterminer une base.

IV.3 Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène

Considérons un système d'équations linéaires homogène de n équations à p inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, posons $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p$.

φ_i est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. Son noyau est donc un hyperplan H_i.

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système correspond ainsi à l'intersection $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{H}_i$ de n hyperplans de $\mathbb{R}^p$.

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in [\![1\,;n]\!]$.

1. L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

Par exemple, le système linéaire $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ décrit une droite de dimension $1 \geqslant 3-3=0$ et non un point de $\mathbb{R}^3$ car la troisième équation n'est jamais que la somme des deux premières. Le théorème s'applique.

Preuve :

(i) Soient $H_1, \dots, H_r$ des hyperplans de E.

Pour tout $k \in [\![1\,;r]\!]$, notons φ_k une forme linéaire non nulle de E dont H_k est le noyau.

L'application $x \overset{\Phi}{\longmapsto} (\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}^r$ de noyau $H_1 \cap .. \cap H_r$.

D'après le théorème du rang, $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_r) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\Phi) \geqslant \dim(E) - \dim(\mathbb{K}^r) = n-r$.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$.

Donnons-nous une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont les $n-r$ derniers vecteurs forment une base de F et pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, notons φ_i la i ème forme coordonnée associée.

Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in F &\iff x \in \mathrm{vect}\,(e_{r+1}, \dots, e_n) \\ &\iff \varphi_1(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0 \\ &\iff x \in \ker(\varphi_1) \cap \dots \cap \ker(\varphi_r)\,. \end{aligned}$$

Finalement, $F = \ker(\varphi_1) \cap \dots \cap \ker(\varphi_r)$, ce qui fait bien de F l'intersection de r hyperplans de E.

V ENDOMORPHISMES REMARQUABLES : PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

V.1 Homothéties

Définition 4 : Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle *homothétie* de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$:

$$h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda._E x \end{array}.$$

Proposition 18 : Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E dont l'automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Preuve : Une démonstration à la portée de tous :

$$(\lambda \mathrm{Id}_E) \circ \left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Id}_E.$$

Exercice 14 : Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

V.2 Projecteurs

Définition 5 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E.

On appelle *projection* (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}_1$ telle que :

$$\forall\, x_1 \in \mathrm{E}_1,\ p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall\, x_2 \in \mathrm{E}_2,\ p(x_2) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Ainsi,

$$p :\ \begin{array}{rcl} \mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1. \end{array}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

On dira qu'une application p est un projecteur s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E tels que p soit la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Remarque : L'existence et l'unicité d'une telle application linéaire p est donnée par la proposition (9) avec

$$f_{|\mathrm{E}_1} :\ \begin{array}{rcl} \mathrm{E}_1 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x_1 & \longmapsto & x_1 \end{array} \quad \text{et} \quad f_{|\mathrm{E}_2} :\ \begin{array}{rcl} \mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x_2 & \longmapsto & 0_{\mathrm{E}}. \end{array}$$

Exemple 17 : Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$ *i.e.* $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}\overrightarrow{e_1} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{e_2} = \mathrm{D}_1 \oplus \mathrm{D}_2$.

On peut alors définir la projection p sur D_1 parallèlement à D_2 :

$$p :\ \begin{array}{rcl} \vec{\mathcal{E}}_2 = \mathrm{D}_1 \oplus \mathrm{D}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 \\ \vec{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} & \longmapsto & \overrightarrow{x_1}. \end{array}$$

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) : Soient $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$
2. $p \circ p = p$ (On dit que p est *idem-potent.*)
3. $\mathrm{E}_2 = \ker(p)$.
4. $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Im}\,(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

En particulier, si p est un projecteur alors $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{E}$.

Preuve :

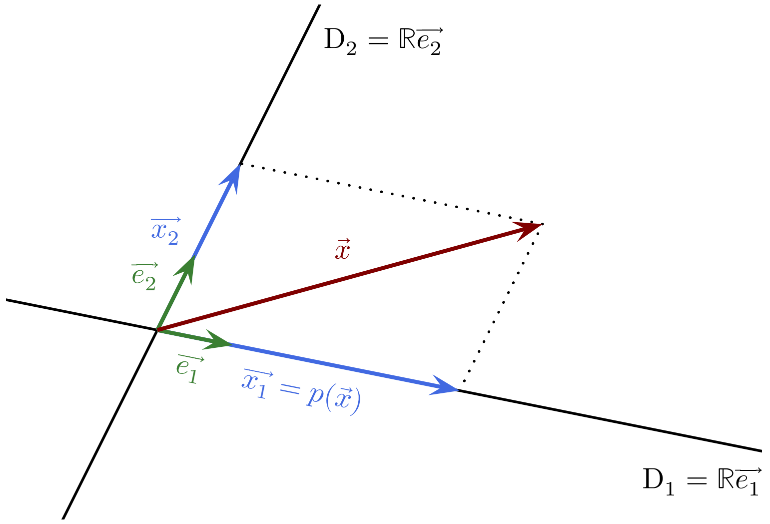

Figure XXVII.5 – Exemple de projecteur dans $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{1}$ Cela vient de la structure d'espace vectoriel de E_1 et E_2.

Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ et $v = v_1 + v_2$ où $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$.

Alors $\lambda u + v = \lambda(u_1 + u_2) + v_1 + v_2 = \underbrace{\lambda u_1 + v_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda u_2 + v_2}_{\in E_2}$.

Donc $p(\lambda u + v) = \lambda u_1 + v_1 = \lambda p(u) + p(v)$.

On a bien $p \in \mathscr{L}(E)$

$\boxed{2}$ Soit $u \in E$. On pose $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$.

$p(u) = u_1 = u_1 + 0_E$. Donc $p(p(u)) = p(u_1 + 0_E) = u_1 = p(u)$.

D'où $p \circ p = p$.

$\boxed{3}$ Soit $u \in E$. On pose $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$.

$u \in \ker(p) \iff p(u) = 0_E \iff u_1 = 0_E \iff u = 0_E + u_2 \iff u \in E_2$.

D'où $\ker(p) = E_2$.

$\boxed{4}$ Tout d'abord, si $u \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ alors $p(u) = u$ i.e. $u \in \mathrm{Im}(p)$. D'où $\ker(p - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(p)$.

Par définition de p, on a aussi $\mathrm{Im}(p) \subset E_1$.

Enfin, si $u \in E_1$ alors $u = u + 0_E$ et $p(u) = u$ i.e. $E_1 \subset \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.

Par transitivité de l'inclusion, on obtient $\ker(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p) = E_1$.

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) : Soit $p \in \mathscr{L}(E)$.

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

ATTENTION $x \longmapsto |x|$ est idem-potente mais n'est pas une projection. La linéarité est importante !

Méthode 3 (Montrer qu'une application linéaire est un projecteur) :
Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $p \circ p = p$ alors :

1. p est un projecteur.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$:
$$\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$
3. p est LA projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Preuve : On a déjà montré l'implication directe. Montrons sa réciproque.
Soit p un projecteur.

1. Montrons que $\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = \mathrm{E}$.

   – Soit $u \in \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$.
   Comme $u \in \mathrm{Im}(p)$, $\exists x_1 \in \mathrm{E}$ tel que $u = p(x_1)$.
   $u \in \ker(p) \implies p(u) = 0_{\mathrm{E}}$.
   Or, $p(u) = p(p(x_1)) = p(x_1) = u$.
   Donc $u = 0_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) \subset \{0_{\mathrm{E}}\}$.
   L'inclusion réciproque $\{0_{\mathrm{E}}\} \subset \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$ est immédiate donc $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

   – On a $\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) \subset \mathrm{E}$. Pour montrer l'inclusion réciproque, raisonnons par analyse-synthèse :

   Analyse : Soit $u \in \mathrm{E}$. On cherche $(x\,;y) \in \ker(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tel que $u = x + y$.

   Comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $y_1 \in \mathrm{E}$ tel que $y = p(y_1)$.

   Mais alors :
$$p(u) = p(x) + p(y) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in \ker(p)}}{=} p(y) = p(p(y_1)) \underset{\substack{\uparrow \\ p \circ p = p}}{=} p(y_1) = y.$$
   Ainsi, $y = p(u)$ et $x = u - p(u)$.

   Synthèse : Soit $u \in \mathrm{E}$ et posons $u = u - p(u) + u$. Il reste à montrer que $u - p(u) \in \ker(p)$ et $u \in \mathrm{Im}(p)$.
$$p(u) \in \mathrm{Im}(p) \text{ et } p(u - p(u)) = p(u) - p(p(u)) = p(u) - p(u) = 0 \implies u - p(u) \in \ker(p).$$

   En conclusion, $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

2. Pour tout $u \in \mathrm{E}$, on a $u = \underbrace{p(u)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{[u - p(u)]}_{\in \ker(p)}$.

   Si q est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ alors $q(x) = p(x)$ i.e. $p = q$: p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

À retenir 2 : Dans le cas d'un projecteur p, retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall\, u \in \mathrm{E},\ u = \underbrace{p(u)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{u - p(u)}_{\in \ker(p)}.$$

Exemple 18 : Considérons l'application du plan $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{array}$.

- $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p\Big(p((x,y))\Big) = p\left(\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = p((x,y))$.

  Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

De plus :

$(x,y) \in \ker(p) \iff \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = (0,0) \iff y = -x \iff (x,y) = (x,-x) \iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,-1)$.

$(x,y) \in \mathrm{Im}\,(p) \iff x = y \iff (x,y) = (x,x) \iff (x,y) \in \mathbb{R}(1,1)$.

Donc, p est le projecteur sur $\mathbb{R}(1,1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1,-1)$.

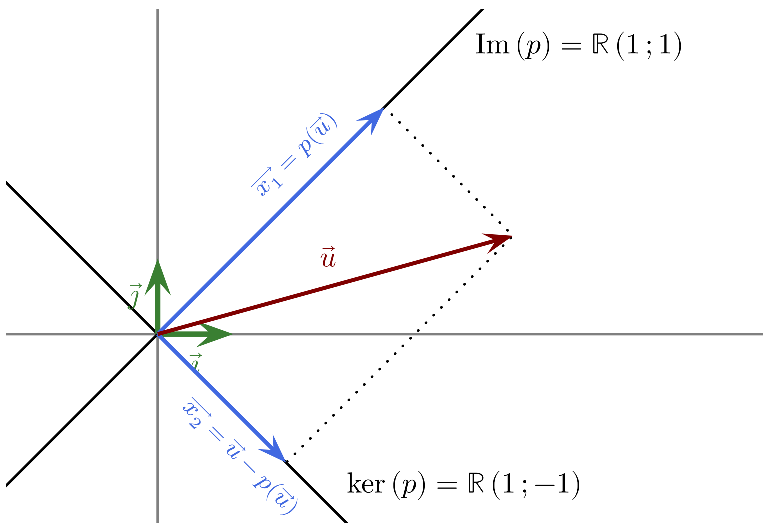

Figure XXVII.6 – Projection sur la droite $y = x$ parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 : Identifier l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -9x+6y \\ -15x+10y \\ -5x+3y+z \end{pmatrix} \end{array}$

Définition 6 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

On dit que p et q sont des *projecteurs associés.*

Proposition 21 : Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

1. $p + q = \mathrm{Id}_E$.
2. $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 16 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que $p \circ q = p \iff \ker(q) \subset \ker(p)$.
2. Démontrer que $p \circ q = q \iff \mathrm{Im}\,(q) \subset \mathrm{Im}\,(p)$.

V.3 Symétries

Définition 7 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle *symétrie* par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

$$\forall\, x = x_1 + x_2 \in E \text{ où } (x_1\,; x_2) \in E_1 \times E_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$s : \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2. \end{array}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

Remarque : On a aussi $s = p - q$ où p et q sont les projecteurs associés à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$.

Exemple 19 : Dans $\vec{\mathscr{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathscr{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}$ *i.e.* $\vec{\mathscr{E}}_2 = \mathbb{R}\vec{e_1} \oplus \mathbb{R}\vec{e_2} = D_1 \oplus D_2$.

On peut alors définir la symétrie s par rapport à D_1 parallèlement à D_2 :

$$s : \begin{array}{rcl} \vec{\mathscr{E}}_2 = D_1 \oplus D_2 & \longrightarrow & E_1 \\ \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} & \longmapsto & \vec{x_1} - \vec{x_2}. \end{array}$$

Proposition 22 (Propriétés des symétries) : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

1. $s \in \mathscr{L}(E)$

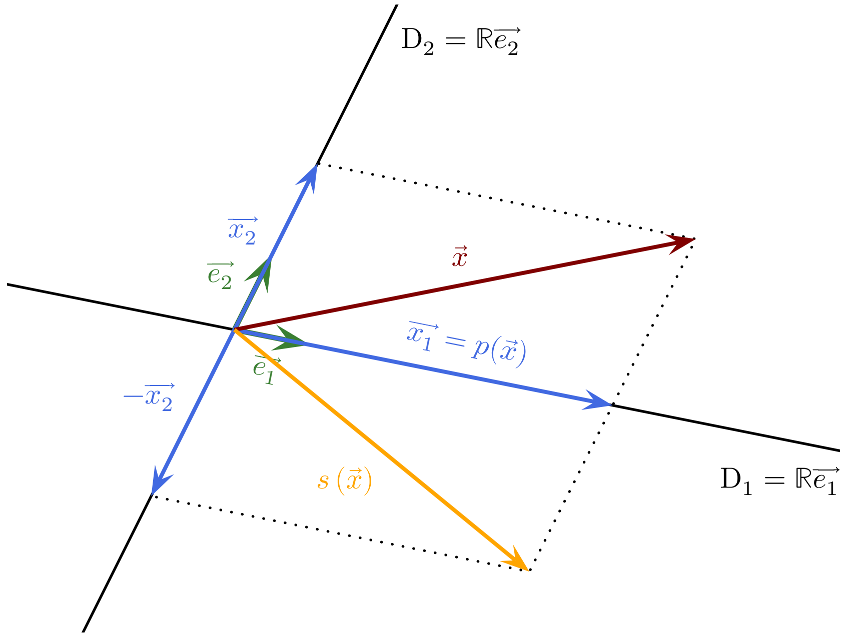

Figure XXVII.7 – Exemple de symétrie dans $\mathbb{R}^2$.

2. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ *i.e.* s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
3. $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s.
4. $E_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ *i.e.* E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s.

En particulier, si s est une symétrie alors $\ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E) = E$.

Preuve : Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

1. Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ et $v = v_1 + v_2$ $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$.
   Alors $\lambda u + v = \lambda(u_1 + u_2) + v_1 + v_2 = \underbrace{\lambda u_1 + v_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda u_2 + v_2}_{\in E_2}$.
   Donc $s(\lambda u + v) = (\lambda u_1 + v_1) - (\lambda u_2 + v_2) = \lambda(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) = \lambda s(u) + s(v)$.
   On a bien $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soit $u \in E$. On pose $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$.
   $s(s(u)) = s(u_1 - u_2) = u_1 + u_2 = u = \mathrm{Id}_E(u)$.
   D'où $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

   Remarque : $s \circ s = (p - q) \circ (p - q) = p \circ p - p \circ q - q \circ p + q \circ q = p + q = \mathrm{Id}_E$.
3. Soit $u \in E$. On pose $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$.
   $$u \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) \iff s(u) - u = 0_E \iff 2u_2 = 0_E \iff u_2 = 0_E \iff u = u_1 \iff u \in E_1.$$
   D'où $\ker(s - \mathrm{Id}_E) = E_1$.
4. Avec les mêmes notations :
   $$u \in \ker(s + \mathrm{Id}_E) \iff s(u) + u = 0_E \iff 2u_1 = 0_E \iff u_1 = 0_E \iff u = u_2 \iff u \in E_2.$$

D'où $\ker(s+\mathrm{Id}_E) = E_2$

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) : Soit $s \in \mathscr{L}(E)$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$

Plus précisément, $E = \ker(s-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s+\mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s+\mathrm{Id}_E)$.

ATTENTION $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est involutive mais n'est pas une symétrie. La linéarité est importante !

Preuve : Une fois encore, on a déjà montré le sens direct. Montrons le sens réciproque.

1. Posons $E_1 = \ker(s-\mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \ker(s+\mathrm{Id}_E)$ et montrons que $E_1 \oplus E_2 = E$.

   - Soit $u \in E_1 \cap E_2$.
     $\begin{cases} u \in \ker(s-\mathrm{Id}_E) \\ u \in \ker(s+\mathrm{Id}_E) \end{cases}$, donc $\begin{cases} s(u) = u \\ s(u) = -u \end{cases}$ puis $u = 0_E$.
     D'où $E_1 \cap E_2 \subset \{0_E\}$ et par suite, $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
   - On a $E_1 \oplus E_2 \subset E$.
     Soit $u \in E$. Écrivons $u = \underbrace{\frac{1}{2}[u+s(u)]}_{u_1} + \underbrace{\frac{1}{2}[u-s(u)]}_{u_2}$.
     On a $s(u_1) = s\left(\frac{1}{2}[u+s(u)]\right) = \frac{1}{2}(s(u)+u) = u_1$. Donc $u_1 \in \ker(s-\mathrm{Id}_E) = E_1$.
     Et $s(u_2) = s\left(\frac{1}{2}[u-s(u)]\right) = \frac{1}{2}(s(u)-u) = -u_2$. Donc $u_2 \in \ker(s+\mathrm{Id}_E) = E_1$.
     D'où $u \in E_1 \oplus E_2$. On a démontré $E \subset E_1 \oplus E_2$ et finalement $E_1 \oplus E_2 = E$.

2. La symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est correctement définie. Notons-la S, et montrons que $s = S$.

   Soit $u \in E$. Écrivons $u = \underbrace{\frac{1}{2}[u+s(u)]}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}[u-s(u)]}_{\in E_2}$.

   On a donc $S(u) = \frac{1}{2}[u+s(u)] - \frac{1}{2}[u-s(u)] = s(u)$. CQFD.

Remarque : On peut montrer ce résultat d'une manière moins constructive mais en se servant de ce que l'on a déjà fait. On pose pour cela $p = \dfrac{s+\mathrm{Id}_E}{2} \in \mathscr{L}(E)$ et on utilise le théorème (20) :

1. $p \circ p = \dfrac{(s+\mathrm{Id}_E)\circ(s+\mathrm{Id}_E)}{4} = \dfrac{s\circ s + s + s + \mathrm{Id}_E}{4} = \dfrac{s+\mathrm{Id}_E}{2} = p$.

   Donc p est un projecteur.

2. p est donc un projecteur sur $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \ker(p-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $E_2 = \ker(p)$ qui sont en somme directe dans E.

Par définition, $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est donc bien une symétrie par rapport à

$$E_1 = \ker\left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2} - \mathrm{Id}_E\right) = \ker\left(\frac{s - \mathrm{Id}_E}{2}\right) = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$$

et parallèlement à $E_2 = \ker\left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right) = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Méthode 4 (Montrer qu'une application linéaire est une symétrie) :
Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ alors :

1. s est une symétrie.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$:
$$E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E).$$
3. s est LA symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

À retenir 3 : Dans le cas d'une symétrie s, retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall\, u \in E,\ u = \underbrace{\frac{u + s(u)}{2}}_{\in \ker(s - \mathrm{Id}_E)} + \underbrace{\frac{u - s(u)}{2}}_{\in \ker(s + \mathrm{Id}_E)}.$$

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $E = \ker(s) \oplus \mathrm{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Exemple 20 : Soit $S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$

- $S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x, y))) = S((y, x)) = (x, y)$ d'où $S \circ S = \mathrm{Id}_E$.

On en déduit que S est une symétrie.

De plus,

$(x, y) \in \ker(S - \mathrm{Id}_E) \iff (y, x) = (x, y) \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, 1)$.

$(x, y) \in \ker(S + \mathrm{Id}_E) \iff (y, x) = (-x, -y) \iff x = -y \iff (x, y) = (x, -x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -1)$.

Donc S est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}(1, 1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, -1)$.

Exercice 17 : Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{(x, y, z) \,/\, x + 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}\,((1, 1, 1))$.

1. Vérifier que $F \oplus G = E$.
2. Soit s la symétrie de base F de direction G. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, déterminer $s((x, y, z))$.

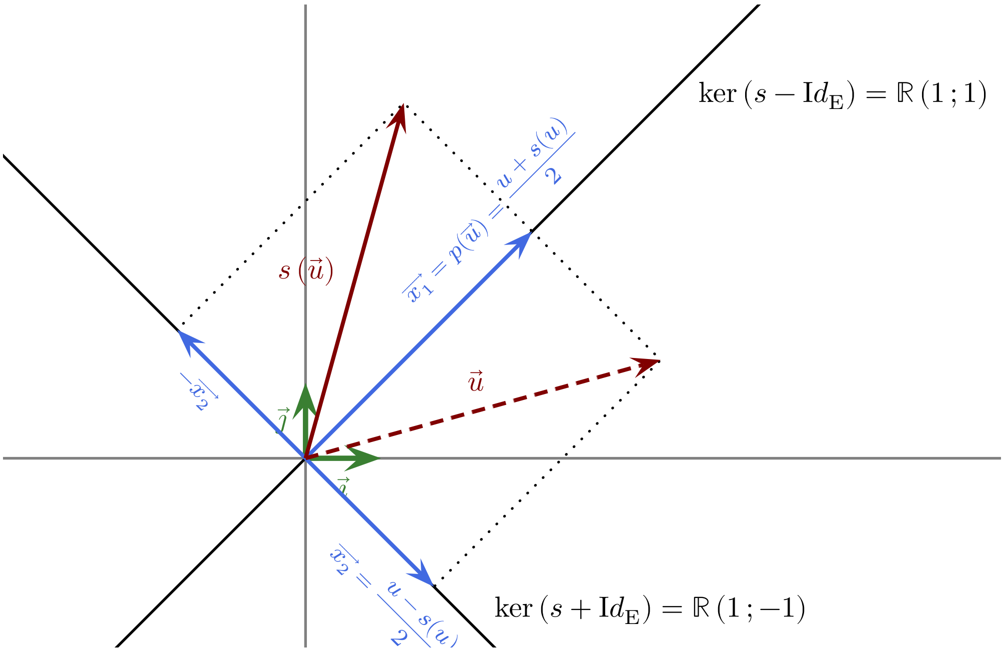

Figure XXVII.8 – Symétrie par rapport à la droite $y = x$ et parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Un ingénieur, un physicien, un mathématicien doivent parquer un troupeau de moutons avec le moins de barbelé possible.

L'ingénieur prend son barbelé et fait le tour du troupeau.

Le physicien va chercher des chiens de berger pour les rassembler et fait le tour du troupeau avec le barbelé.

Le mathématicien prend 20 cm de barbelé et se les met autour de la taille et définit l'enclos comme l'ensemble où il n'est pas.