Applications linéaires

I Généralités

Exercice 1 : Montrer qu'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe (x',y') est linéaire si, et seulement si, il existe des réels $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tels que : $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$.

Trouver de même l'écriture analytique d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$; de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Généraliser à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

On définit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E}\times\mathrm{F} \\ (x,y) & \longmapsto & (x, y-f(x)) \end{array}$.

Montrer que ϕ est un automorphisme du $\mathbb{K}$-ev produit $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$.

Exercice 3 :

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
$$f((1,0,0)) = (1,1), \quad f((0,1,0)) = (0,1) \quad \text{et} \quad f((0,0,1)) = (-1,1).$$
Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.
2. Déterminer $\ker(f)$ et en fournir une base.
3. Donner un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 : Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\ker(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\ker(f)$.

Exercice 5 : Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ avec
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}'. \end{array}$$
Même question si f est définie sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Exercice 6 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z)$.
2. $(x,y,z) \longmapsto (2x-y+z, 3x+y-z, x-3y+3z, 2x+4y-4z)$.
3. $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{X}\left(\mathrm{P}'(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}'(1)\right)$ de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ dans lui-même.
4. $\mathrm{M} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \mathrm{M}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Exercice 7 :

1. Montrer que l'application $(x,y,z) \longmapsto (x+2y, 4x-y+z, 2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

2. Proposer un exemple d'isomorphisme de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Exercice 8 : On définit f, g de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, par $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que f est surjective et non injective.
3. Montrer que g est injective et non surjective.

Exercice 9 : On considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout polynôme P associe le réel $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la dimension de son noyau, et une base de ce noyau.

II Rang d'une application linéaire

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$, discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de vect (u, v, w) avec $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$.

Exercice 11 : Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

Déterminer le rang de f.

Exercice 12 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$.

   Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant n$.
2. On ajoute l'hypothèse : $f + g \in \mathscr{G}l(E)$.

   Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z, t)) = (x + y + z + 2t, y - z + t, x - y + 3z)$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Démontrer que $\ker(f) = \operatorname{vect}\left((1, 1, 0, -1), (-3, 0, 1, 1)\right)$.
3. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^4$, calculer le rang de $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ et déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
4. Vérifier le théorème du rang.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose $E = \ker(f) + \ker(g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 15 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

À l'aide du théorème du rang, montrer que :

$$\ker(u) = \ker\left(u^2\right) \iff \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right) \iff E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u).$$

Exercice 16 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x\,;2x - y) \end{array}$ Montrer que $f \in \mathscr{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 17 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$, on considère $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ par $f(1) = 1 + i$ et $f(i) = 3 - i$.

Montrer que f est un automorphisme.

III Endomorphismes remarquables

Exercice 18 : Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $p((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$.

1. Montrer que p est linéaire.
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Déterminer une base de $\ker(p)$ et de $\operatorname{Im}(p)$.

Exercice 19 : Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}, 0\right)$.

1. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ?
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$, puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
3. f est-elle un projecteur ?

Exercice 20 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Démontrer que $f^2 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \iff \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est un projecteur.

Exercice 21 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

On suppose que p et q commutent. Montrer que $p \circ q$ est la projection de E sur $\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ de direction $\ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 22 : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$p + q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0 \iff \operatorname{Im}(p) \subset \ker(q) \text{ et } \operatorname{Im}(q) \subset \ker(p).$$

Dans le cas où $p+q$ est un projecteur, déterminer $\ker(p+q)$ et $\operatorname{Im}(p+q)$.

Exercice 23 : On considère l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on associe l'élément $\mathrm{T}(f) \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{T}(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 24 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

On pose $\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = ix\}$ et $\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = -ix\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. Déterminer l'expression de f en fonction des projecteurs p et q associés à la somme directe précédente.