Applications linéaires

I Généralités

Exercice 1 : Montrer qu'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe (x', y') est linéaire si, et seulement si, il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que : $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$.

Trouver de même l'écriture analytique d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$; de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Généraliser à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On définit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \times \mathrm{F} \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y - f(x)) \end{array}$.

Montrer que ϕ est un automorphisme du $\mathbb{K}$-ev produit $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Exercice 3 :

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1), \quad f((0, 1, 0)) = (0, 1) \quad \text{et} \quad f((0, 0, 1)) = (-1, 1).$$

Calculer $f((3, -1, 4))$ et $f((x, y, z))$ en général.

2. Déterminer $\ker(f)$ et en fournir une base.
3. Donner un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.

Correction :

1. Si f existe alors nécessairement, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f((x, y, z)) = xf((1, 0, 0)) + yf((0, 1, 0)) + zf((0, 0, 1)) = x(1, 1) + y(0, 1) + z(-1, 1) = (x - z, x + y + z).$$

On en déduit l'unicité de f.
Réciproquement, f ainsi définie vérifie bien les trois égalités de l'énoncé. Il reste donc à se convaincre que f est linéaire.

Soient $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x - z, x + y + z) + \mu(x' - z', x' + y' + z') \\ &= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z')). \end{aligned}$$

f est donc linéaire et convient. On en déduit l'existence de f.
On a alors $f((3, -1, 4)) = (3 - 4, 3 - 1 + 4) = (-1, 6)$.

Remarque : La démonstration de la linéarité de f ci-dessus est en fait superflue car l'exercice (1) qui est un résultat à connaître, donne l'expression générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2 Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f((x,y,z))=(0,0) \Leftrightarrow (x-z,x+y+z)=(0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=x \\ y=-2x \end{array}\right.$$

Donc, $\ker(f)=\{(x,-2x,x),\ x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,-2,1),\ x\in\mathbb{R}\}=\text{vect}\,((1,-2,1))$. La famille $((1,-2,1))$ engendre $\ker(f)$ et est libre.

Donc, la famille $((1,-2,1))$ est une base de $\ker(f)$.

3 **Détermination de $\text{Im}\,(f)$:** Soit $(x',y')\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x',y')\in\text{Im}\,(f) &\Leftrightarrow \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ f((x,y,z))=(x',y') \\ &\Leftrightarrow \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} x-z=x' \\ x+y+z=y' \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \text{le système d'inconnue } (x,y,z) \ :\ \left\{\begin{array}{l} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{array}\right. \text{ a au moins une solution.} \end{aligned}$$

Or, le triplet $(0,x'+y',-x')$ est solution et le système proposé admet une solution.

Par suite, tout (x',y') de $\mathbb{R}^2$ est dans $\text{Im}\,(f)$ et finalement, $\text{Im}\,(f)=\mathbb{R}^2$.

Détermination d'un supplémentaire de $\ker(f)$: Posons $e_1=(1,-2,1)$, $e_2=(1,0,0)$ et $e_3=(0,1,0)$ puis $\mathrm{F}=\text{vect}\,(e_2,e_3)$ et montrons que $\mathbb{R}^3=\ker(f)\oplus\mathrm{F}$.

Tout d'abord, $\ker(f)\cap\mathrm{F}=\{0\}$. En effet :

$$\begin{aligned} (x,y,z)\in\ker(f)\cap\mathrm{F} &\Leftrightarrow \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y,z)=ae_1=be_2+ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} x=a=b \\ y=-2a=c \\ z=a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z=0 \end{aligned}$$

Vérifions ensuite que $\ker(f)+\mathrm{F}=\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z)\in\ker(f)+\mathrm{F} &\Leftrightarrow \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y,z)=ae_1+be_2+ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} a+b=x \\ -2a+c=y \\ a=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} a=z \\ b=x-z \\ c=y+2z \end{array}\right. \end{aligned}$$

Le système précédent (d'inconnue (a,b,c)) admet donc toujours une solution et on a montré que $\mathbb{R}^3=\ker(f)+\mathrm{F}$.

Finalement, $\mathbb{R}^3=\ker(f)\oplus\mathrm{F}$ et F est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Vérifions enfin que F est isomorphe à $\text{Im}\,(f)$: On sait que $\mathrm{F}=\{(x,y,0),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,0) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$ est alors clairement un isomorphisme de F sur $\text{Im}\,(f)\ (=\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4 : Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\ker(f)=\text{Im}(f)$.
2. $\ker(f)$ inclus strictement dans $\text{Im}(f)$.
3. $\text{Im}(f)$ inclus strictement dans $\ker(f)$.

Correction :

1. Par exemple $f(x,y) = (0,x)$ alors $\ker f = \operatorname{Im} f = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
2. Par exemple l'identité : $f(x,y) = (x,y)$. En fait un petit exercice est de montrer que les seules applications possibles sont les applications bijectives (c'est très particulier aux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).
3. L'application nulle : $f(x,y) = (0,0)$. Exercice : c'est la seule possible !

Exercice 5 : Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

Même question si f est définie sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 6 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z)$.
2. $(x,y,z) \longmapsto (2x-y+z, 3x+y-z, x-3y+3z, 2x+4y-4z)$.
3. $P \longmapsto X\left(P'(X+1) - P'(1)\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
4. $M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Exercice 7 :

1. Montrer que l'application $(x,y,z) \longmapsto (x+2y, 4x-y+z, 2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.
2. Proposer un exemple d'isomorphisme de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Exercice 8 : On définit f, g de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, par $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que f est surjective et non injective.
3. Montrer que g est injective et non surjective.

Exercice 9 : On considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout polynôme P associe le réel $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la dimension de son noyau, et une base de ce noyau.

II Rang d'une application linéaire

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$, discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de $\operatorname{vect}(u,v,w)$ avec $u = (a,1,1)$, $v = (1,a,1)$ et $w = (1,1,a)$.

Correction : Soit $x\,(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \in \operatorname{vect}(u,v,w)$. Il existe alors $(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = x_1 u + x_2 v + x_3 w \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & = & x_1 a & + & x_2 & + & x_3 \\ \beta & = & x_1 & + & a x_2 & + & x_3 \\ \gamma & = & x_1 & + & x_2 & + & a x_3 \end{array}\right.$$

Si $a \neq 0$, alors :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \alpha & = & x_1 a & + & x_2 & + & x_3 \\ a\beta - \alpha & = & & & (a^2-1)x_2 & + & (a-1)x_3 \\ a\gamma - \alpha & = & & + & (a-1)x_2 & + & (a^2-1)x_3 \end{array}\right.$$

Si $a \neq -1$ alors :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \alpha & = & x_1 a & + & x_2 & + & x_3 \\ a\beta - \alpha & = & & & (a^2-1)x_2 & + & (a-1)x_3 \\ -a\alpha - a\beta + a(a+1)\gamma & = & = & & & & a(a-1)(a+2)x_3 \end{array}\right.$$

En conclusion,

- si a est différent de 0, 1 et -2, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est déterminer de manière unique : $\mathrm{vect}\,(u,v,w)$ est de rang 3.
- si $a=-2$, le système est compatible si, et seulement si $\alpha+\beta+\gamma=0$: $\mathrm{vect}\,(u,v,w)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$ et de dimension 2.
- si $a=1$, alors $x = x_1u + x_2v + x_3w \iff \alpha=\beta=\gamma$: c'est une droite de système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} x=y \\ x=z \end{array}\right.$ ou de paramétrisation $\mathrm{vect}\,((1\,;1\,;1))$ de dimension 1.
- si $a=0$, $x = x_1u+x_2v+x_3w \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} \alpha & = & & & x_2 & + & x_3 \\ \beta & = & x_1 & & & + & x_3 \\ \gamma & = & x_1 & + & x_2 & & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2\alpha+\beta+2\gamma \\ x_2 & = & \alpha-2\beta+2\gamma \\ x_3 & = & \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \end{array}\right.$

  Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est déterminé de manière unique : $\mathrm{vect}\,(u,v,w)$ est de rang 3.

Exercice 11 : Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2=0$.
Déterminer le rang de f.

Exercice 12 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1. Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $f \circ g = 0$.

   Montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) \leqslant n$.
2. On ajoute l'hypothèse : $f+g \in \mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

   Montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = n$.

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f((x,y,z,t)) = (x+y+z+2t, y-z+t, x-y+3z)$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Démontrer que $\ker(f) = \mathrm{vect}\,((1,1,0,-1),(-3,0,1,1))$.
3. $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^4$, calculer le rang de $(f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4))$ et déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
4. Vérifier le théorème du rang.

Correction :

1. f est linéaire : AQT !

2 Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in \ker(f) &\iff f((x,y,z,t)) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ y-z+t=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ y-z+t=0 \\ -2y+2z-2t=0 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ y-z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2t=-y-z \\ t=-y+z \end{cases} \iff \begin{cases} x=y-2z \\ t=-y+z \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = (y-3z, y, z, -y+z) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{vect}\left((1,1,0,-1),(-3,0,1,1)\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\ker(f) = \mathrm{vect}\left((1,1,0,-1),(-3,0,1,1)\right).$$

3 $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$: base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,0,1) \\ f(e_2) = (1,1,-1) \\ f(e_3) = (1,-1,3) \\ f(e_4) = (2,1,0) \end{cases}$$

– On a $f(e_4) = f(e_1) + f(e_2)$ d'où

$$\mathrm{rg}\ (f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)) = \mathrm{rg}\ (f(e_1),f(e_2),f(e_3))$$

– On a $f(e_3) = 2f(e_1) - f(e_2)$ d'où

$$\mathrm{rg}\ (f(e_1),f(e_2),f(e_3)) = \mathrm{rg}\ (f(e_1),f(e_2))$$

– La famille $(f(e_1),f(e_2))$ est libre donc

$$\mathrm{rg}\ (f(e_1),f(e_2)) = 2$$

$$\mathrm{rg}\ (f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)) = 2.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{vect}\left(f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)\right) \\
&= \mathrm{vect}\left(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\right) \\
&= \mathrm{vect}\left(f(e_1),f(e_2)\right)
\end{aligned}$$

La famille $(f(e_1),f(e_2))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$.

Or, on a vu qu'elle était libre.

Donc, $(f(e_1),f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{rg}\, f = 2.$$

La formule du rang est bien vérifiée :

$$\begin{cases} \dim\ker(f) + \mathrm{rg}\, f = 2+2 = 4 \\ \dim \mathbb{R}^4 = 4 \end{cases}$$

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

On suppose $\mathrm{E} = \ker(f) + \ker(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 15 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
À l'aide du théorème du rang, montrer que :

$$\ker(u) = \ker\left(u^2\right) \iff \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right) \iff \mathrm{E} = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u).$$

Exercice 16 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x\,;2x-y) \end{array}$ Montrer que $f \in \mathscr{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 17 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$, on considère $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ par $f(1) = 1+i$ et $f(i) = 3-i$.
Montrer que f est un automorphisme.

III Endomorphismes remarquables

Exercice 18 : Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $p((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$.

1. Montrer que p est linéaire.
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Déterminer une base de $\ker(p)$ et de $\operatorname{Im}(p)$.

Exercice 19 : Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}, 0\right)$.

1. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ?
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$, puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
3. f est-elle un projecteur ?

Exercice 20 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
Démontrer que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \iff \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ est un projecteur.

Exercice 21 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.
On suppose que p et q commutent. Montrer que $p \circ q$ est la projection de E sur $\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ de direction $\ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 22 : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$p+q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0 \iff \operatorname{Im}(p) \subset \ker(q) \text{ et } \operatorname{Im}(q) \subset \ker(p).$$

Dans le cas où $p+q$ est un projecteur, déterminer $\ker(p+q)$ et $\operatorname{Im}(p+q)$.

Correction : On montre la première équivalence :

$\Rightarrow$: Si $p+q$ est un projecteur alors l'égalité $(p+q)^2 = p+q$ fournit $p \circ q + q \circ p = 0$.

En composant par p à droite et à gauche, on obtient $p \circ q \circ p + q \circ p = 0 = p \circ q + p \circ q \circ p$ et donc $p \circ q = q \circ p$.

Cette égalité jointe à l'égalité $p \circ q + q \circ p = 0$ fournit $p \circ q = q \circ p = 0$.

$\Leftarrow$: Si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$ et $p+q$ est un projecteur.

Finalement, pour tous projecteurs p et q, ($p+q$ projecteur $\iff p \circ q = q \circ p = 0$.

La seconde est relativement claire.

Dorénavant, $p+q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $p \circ q = q \circ p = 0$.

On a toujours $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(p+q)$.

Réciproquement, pour $x \in E$,

$$x \in \ker(p+q) \implies (p+q)(x) = 0 \implies p(p(x)+q(x)) = 0 \implies p(x) = 0,$$

et de même $q(x) = 0$.

Ainsi, $\ker(p+q) \subset \ker(p) \cap \ker(q)$ et donc $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

On a toujours $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Réciproquement, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \implies \exists (x_1, x_2) \in E^2 /\ x = p(x_1) + q(x_2).$$

Mais alors, $(p+q)(x) = p^2(x_1) + p \circ q(x_1) + q \circ p(x_2) + q^2(x_2) = p(x_1) + q(x_2) = x$ et donc $x \in \mathrm{Im}(p+q)$.

Ainsi, $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et donc $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

En résumé, si p et q sont deux projecteurs tels que $p+q$ soit un projecteur, alors

$$\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 23 : On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on associe l'élément $\mathrm{T}(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Correction : T est clairement un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

De plus, pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{T} \circ \mathrm{T})(f)(x) = f(-(-x)) = f(x).$$

Donc $\mathrm{T} \circ \mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})}$ et T est la symétrie par rapport à $\mathcal{P} = \ker(\mathrm{T} - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})})$ parallèlement à $\mathcal{I} = \ker(\mathrm{T} + \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})})$.

Or, $f \in \mathcal{P} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \iff f$ est paire.

De même, $f \in \mathcal{I} \iff f$ est impaire.

Ainsi, on retrouve de cette manière que $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 24 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

On pose $\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = ix\}$ et $\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = -ix\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. Déterminer l'expression de f en fonction des projecteurs p et q associés à la somme directe précédente.

Correction :

1.
2. $f = f - p(f) + f - q(f)$ en se rappelant que $p + q = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.