Séries

Exercice 1 :

1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{3x+2}{x(x^2-1)}$ en éléments simples.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

Exercice 2 :

Prouver la convergence de chacune des séries suivantes, et en déterminer la somme.

On utilisera une des méthodes des exercices précédents.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n-1}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^2+n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$

Exercice 3 (Constante d'Euler) :

On considère $\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Sa limite est notée γ et appelée **constante d'Euler**.
2. En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 4 :

Établir la convergence de la suite définie par

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 5 (Cas limite du critère de D'Alembert) :

Soit, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}.$$

1. Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Exercice 6 :

Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 7 :

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $n^{-(1+\frac{1}{n})}$
3. $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$
4. $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5. $\mathrm{ch}^{\,\alpha}(n) - \mathrm{sh}^{\,\alpha}(n)$.
6. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.
7. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
8. $\arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
9. $\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.
10. $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
11. $\dfrac{n!}{n^n}$

12. $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
13. $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
14. $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$
15. $\dfrac{n^2}{(n-1)!}$
16. $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}$
17. $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$
18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
19. $\dfrac{1}{n^\alpha}\mathrm{S}(n)$ où $\mathrm{S}(n)=\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$.

Exercice 8 : On pose $\forall\, n\geqslant 2,\quad u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 9 : Comparer la convergence des séries de terme général

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n}\qquad\text{et}\qquad v_n=u_n\times\left(1+\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n\ln(n)}.$$

Exercice 10 (Semi-convergence) : Nature des séries de terme général :

1. $\sin\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)$
2. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$
3. $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$
4. $(-1)^n\dfrac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls

Exercice 11 : Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 12 (En vrac) : Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2\ln(n)}{e^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2\ln^3(n)}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\arctan(n)}{n^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n^2}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{\sqrt{e}}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(\ln(n))^{-\ln(n)}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln(n)}{e^n}$

Exercice 13 : Étudier la convergence de la série de terme général $u_n=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

Exercice 14 : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}$.

1. En utilisant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$.
2. En utilisant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.