Séries

Exercice 1 :

1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{3x+2}{x(x^2-1)}$ en éléments simples.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

Exercice 2 :
Prouver la convergence de chacune des séries suivantes, et en déterminer la somme.

On utilisera une des méthodes des exercices précédents.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n-1}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^2+n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$

Exercice 3 (Constante d'Euler) :
On considère $\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Sa limite est notée γ et appelée **constante d'Euler**.
2. En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Correction :

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est donc convergente. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de la même nature, elle converge également.
2. On vient de montrer que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 4 :
Établir la convergence de la suite définie par

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 5 (Cas limite du critère de D'Alembert) :
Soit, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}.$$

1. Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Correction :

1. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n+2}$. La suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 1.

2 En outre, $\dfrac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \dfrac{2n+1}{2n} \geqslant 1$.

Par conséquent, la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on a :

$$nu_n \geqslant u_1 \implies u_n \geqslant \frac{u_1}{n}.$$

La série de terme général positif u_n est donc divergente (minorée par une série divergente).

Exercice 6 : Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 7 : Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $n^{-(1+\frac{1}{n})}$
3. $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$
4. $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5. $\mathrm{ch}^{\,\alpha}(n) - \mathrm{sh}^{\,\alpha}(n)$.
6. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.
7. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
8. $\arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
9. $\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.
10. $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
11. $\dfrac{n!}{n^n}$
12. $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
13. $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
14. $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$
15. $\dfrac{n^2}{(n-1)!}$
16. $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$
17. $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}\, n)}$
18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
19. $\dfrac{1}{n^\alpha}\mathrm{S}(n)$ où $\displaystyle\mathrm{S}(n) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$.

Correction :

1 Montrons que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

De là on tire que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}$.

Par équivalence, la série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente.

2 Montrons que $n^{-(1+\frac{1}{n})} \sim n^{-1}$.

On a $\dfrac{n^{-(1+\frac{1}{n})}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}$.

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$ et l'équivalence.

La série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente car la série harmonique est divergente.

3 On sait que : $\ln(e^n-1) \leqslant \ln e^n = n$.

De plus, $\ln n \geqslant 1$ pour n assez grand, par conséquent $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \geqslant \dfrac{1}{n}$.

On conclut par comparaison des termes généraux de signe positif que la série $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ est divergente.

4 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}>0.$$

La série de terme général $\frac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

5 $\sim \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\left(e^{\alpha-2}\right)^n \implies$ CV ssi $\alpha<2$.

6 $\sim -\frac{3}{n^2} \implies$ CV.

7 $\sim \frac{1}{n^2} \implies$ CV.

8 $\sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} \implies$ CV.

9 CV si, et seulement si $|a|\neq 1$.

10 $\leqslant \frac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Donc CV.

11 Pour $n\geqslant 4$, $\frac{n!}{n^n}=\frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\underbrace{\frac{4}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}}_{\leqslant 1}\leqslant\frac{6}{n^2}$.

Or, $\sum\frac{6}{n^2}$ est convergente.

Donc $\sum\frac{n!}{n^n}$ est aussi convergente par comparaison.

12 Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n\geqslant 1$, u_n existe

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n\geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha>1$), la série de terme général u_n converge.

13 Pour $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n\geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n\geqslant 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

14 Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n\geqslant 1$, $u_n>0$ et

$$\begin{aligned}\ln(u_n)&=\ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)=\ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)\left(-\ln 2+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\ln 2\ln(n)+o(1).\end{aligned}$$

Donc $u_n=e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2\ln n}=\frac{1}{n^{\ln 2}}$.

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\ln 2}}$, $n\geqslant 1$, diverge (série de Riemann d'exposant $\alpha\leqslant 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

15 Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n\neq 0$ pour $n\geqslant 1$.

De plus,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0<1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge.

16 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \times n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} = 0$ donc $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ...

17 Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$. Pour tout $n \geqslant 2$, u_n existe.

De plus, $\ln(\operatorname{ch} n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge.

Donc u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente.

La série de terme général u_n diverge.

18 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif.

De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\dfrac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n aussi.

19 Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\mathrm{S}(n)$. Pour $n \geqslant 2$,

$$0 < \mathrm{S}(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2}\mathrm{S}(n)$$

et donc $\forall n \geqslant 2$, $\mathrm{S}(n) \leqslant \dfrac{\mathrm{S}(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}\frac{\mathrm{S}(2)}{2^{n-2}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

Exercice 8 : On pose $\forall\, n \geqslant 2$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1 Montrer que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

2 En déduire la nature de $\sum u_n$.

Correction : Dans le cas proposé ici, on ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées puisqu'on vérifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante.

On a recours ici à un développement limité pour établir la nature de la série :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underbrace{\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{v_n}. \end{aligned}$$

Étudions chacun des termes de ce développement limité :

- $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme d'une série alternée convergente.
- $\dfrac{1}{n}$ est le terme d'une série divergente.
- $\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est le terme d'une série (absolument) convergente.
- $v_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est le terme d'une série convergente d'après les critères de comparaison.

Par somme de séries convergentes avec une série divergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ terme général d'une série alternée convergente sans que $\sum u_n$ le soit. C'est un bon contre-exemple de séries dont les termes généraux sont équivalents mais pas de signe constant.

Exercice 9 : Comparer la convergence des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Correction : Rapidement,

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge d'après le critère des séries alternées.
- $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ diverge comme somme d'une série convergente et de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ divergente.

Exercice 10 (Semi-convergence) : Nature des séries de terme général :

1. $\sin\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)$
2. $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$
3. $(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$
4. $(-1)^n \dfrac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls

Correction :

1. Pour $n \in \mathbb{N}_{n_0}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + (n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2 Pour $x\in]0,+\infty[$, posons $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>e$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}<0$. Donc, la fonction f est décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est une suite décroissante. Mais alors la série de terme général $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

3 • Si $\deg P\geqslant \deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

• Si $\deg P\leqslant \deg Q-2$, $u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.

• Si $\deg P=\deg Q-1$, $u_n\underset{n\to+\infty}{=}(-1)^n\frac{\operatorname{dom} P}{n\operatorname{dom} Q}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.

En résumé, la série de terme général u_n converge si, et seulement si $\deg P<\deg Q$.

Exercice 11 : Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

1 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. 2 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. 3 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

Correction :

1 $\frac{1}{n}$. 2 $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$. 3 $\ln(\ln n)$.

Exercice 12 (En vrac) : Déterminer la nature des séries suivantes :

1 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2\ln(n)}{e^n}$
2 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2\ln^3(n)}$
3 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\arctan(n)}{n^2}$
4 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
5 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
6 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$
7 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n^2}$
8 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)$
9 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{\sqrt{e}}$
10 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(\ln(n))^{-\ln(n)}$
11 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$
12 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln(n)}{e^n}$

Exercice 13 : Étudier la convergence de la série de terme général $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

Correction :

ATTENTION Comme $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas de signe constant, on ne peut utiliser les critères de comparaison des séries à terme du même nom.

On va devoir « pousser » un petit peu plus loin i.e. le développement limité de u_n donne :

$$u_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{(-1)^n}{2n+1}+v_n,\text{ où } v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{8n^2}.$$

Maintenant, la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par application du critère spécial des séries alternées, et la série $\sum v_n$ à terme général de signe constant, converge elle aussi (série de Riemann).

La série $\sum u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

Exercice 14 : Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}$.

1. En utilisant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
2. En utilisant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction :

1. Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a, b et c tels que, pour entier naturel non nul k,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \ (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1)+bk(2k+1)+ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2+(3a+b+c)k+a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*) \Leftarrow \begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases},$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*_{n_0},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right).$$

Ensuite, comme, quand n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = \mathrm{H}_{n+1}-1 = -1+\ln(n+1)+\gamma+o(1) = \ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\gamma-1+o(1) = \ln n+\gamma-1+o(1).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} &= -1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = -1+\mathrm{H}_{2n+1}-\frac{1}{2}\mathrm{H}_n \\ &= \ln(2n+1)+\gamma-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma)-1+o(1) = \ln 2+\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\gamma-1+o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)\end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2} = 6\left(\ln n+\gamma+\ln n+\gamma-1-4\left(\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1\right)\right) = 6(3-4\ln 2)+o(1).$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2} = 6(3-4\ln 2).$$

2 $\dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2} = \dfrac{6}{k}+\dfrac{6}{k+1}-\dfrac{24}{2k+1} \implies \mathrm{S}_n = 18-24\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{6}{n+1} \to 18-24\ln 2$ lorsque $n\to\infty$.

Index