

XXVIII

Séries numériques

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre par sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et les quelques paradoxes qu'il nous a laissés à méditer à ce sujet. Le plus connu d'entre eux est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue.

Pour fixer les idées, supposons qu'Achille coure à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres), et la tortue (un peu génétiquement modifiée) à 1 mètre par seconde. Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ?

La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ! ».

Voici son raisonnement : le temps qu'Achille parcoure ses cent mètres, la tortue en a franchi dix. Mais le temps qu'Achille parcoure ces dix nouveaux mètres, la tortue en a fait un de plus etc. On aura beau multiplier les étapes, Achille sera toujours derrière.

Comment résoudre le paradoxe ? Regardons les choses d'un point de vue temporel : Achille met 10 secondes pour franchir les cent premiers mètres, puis une seconde supplémentaire pour les dix mètres suivants, $\frac{1}{10}$ seconde pour le mètre suivant etc. Au total, Achille met donc $10 + 1 + \frac{1}{10} + \dots$ secondes avant de rejoindre la tortue. L'astuce est toute simple : cette somme, bien que composée d'un nombre infini de réels, est finie.

Ainsi, même s'il faut un nombre infini d'étapes à Achille pour rejoindre la tortue, celles-ci vont toutes se dérouler dans un laps de temps fini.

C'est là l'idée d'une série (convergente) en mathématiques : une somme d'un nombre infini de termes qui donne pourtant un résultat fini.

Contenu

I. Séries numériques	2
I.1 Suites des sommes partielles	2
I.2 Premiers exemples	4
I.3 Condition nécessaire de convergence	8
II. Séries à terme positif	9
II.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence	9
II.2 Critère de comparaison	10
II.3 Comparaison Série-Intégrale	12
II.4 Séries de Riemann	14
II.5 Règle de D'Alembert	16
III. Quelques exercices à savoir faire	18
III.1 Avec une fraction rationnelle	18
III.2 Avec les critères de comparaison	19
III.3 Avec le critère de D'Alembert	20
III.4 Avec un encadrement	20
III.5 Avec comparaison avec une intégrale	21
IV. Séries absolument convergentes	22
IV.1 Condition suffisante de convergence	22
IV.2 Séries semi-convergentes	(Hors-Programme)
IV.3 Plan d'étude d'une série numérique	24
IV.3 Plan d'étude d'une série numérique	26

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .



SÉRIES NUMÉRIQUES

I.1 Suites des sommes partielles

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle *série de terme général* u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- u_n s'appelle le *terme général* de rang n .
- S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n .
- On dit que la *série* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge* lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

- la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée *somme de la série* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

◇ On appelle *reste de rang n* l'élément R_n défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarques et commentaires :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre (réel ou complexe) ^[1].
- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

- Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

ATTENTION | Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

- Enfin, remarquez que $S_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.

Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

Par exemple, si on sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$, alors $S_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

[1]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, ...

I.2 Premiers exemples

Exemple 1 : Les séries arithmétiques de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} na$ où a est une constante sont toujours divergentes dès que $a \neq 0$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = a \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} a.$$

Exemple 2 : Les séries géométriques de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ où z est un nombre complexes sont convergentes si, et seulement si $|z| < 1$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|z| < 1} \frac{1}{1-z}.$$

De plus, lorsque $|z| < 1$, on a $R_n = \frac{z^{n+1}}{1-z}$.

Remarque : $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$. C'est, à une constante multiplicative près, le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue.

Exercice 1 (Séries géométriques ≠ Co) :

- 1 a) Déterminer $\sum_{n=1}^N nx^{n-1}$.
- b) En déduire la nature de $\sum nx^{n-1}$ selon les valeurs de x .
- c) Lorsque la série converge, déterminer sa somme.
- 2) Même question pour $\sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2}$, puis $\sum_{n \geq 2} n^2x^{n-2}$.
- 3) Déterminer la nature et la somme de $\sum \frac{n^2 + 3n}{2^n}$.

Exemple 3 : La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. [2]

Preuve : Les manières de montrer ce résultat sont nombreuses.

On a, par exemple,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la série convergeait vers un réel S , on aurait alors, par passage à la limite, $0 = S - S \geq \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.

Donc H_n diverge mais on ne sait pas encore si elle a une limite. Patientez jusqu'à l' **exemple (10)** !

Exemple 4 : On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n$.

On exprime les sommes partielles : $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{k=0}^N u_k = \sum_{k=0}^N (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

On en déduit que la série $\sum (-1)^n$ diverge.

Exemple 5 : Les séries télescopiques de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans \mathbb{K} .

Par exemple, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \dots - \cancel{\frac{1}{n}} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

D'une manière générale,

Proposition 1 (Série télescopique) : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Remarque : La simplification télescopique est l'analogue discret du théorème fondamental du calcul intégral.

En effet, la suite $\left(a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1 - n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tout comme la fonction f' définie par une limite de taux d'accroissement est la dérivée de la fonction f .

Or, comment passe-t-on de f' à f ? On somme au sens du calcul intégral, tout comme on le fait avec les suites dans le cadre d'une simplification télescopique :

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \iff \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m.$$

Exercice 2 : Étudier les séries de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Correction :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, de même nature que $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, est donc divergente (vers l'infini).

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall n \geq 2, v_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et on a :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2.$$

Exercice 3 :

1 Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}, \text{ sur }]0, +\infty[.$$

2 Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}$.

Correction :

1 $\forall x > 1, f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

De plus, $a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = \frac{1}{2}$ et $b = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = -\frac{1}{2}$.

Donc $\forall x \in]1; +\infty[$, $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$.

2 $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2S_n = 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1}$
 $= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}$
 $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$

Donc la série converge et on a : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4}$.

Cette méthode, consistant à se servir de la décomposition en éléments simples et d'un changement d'indice, est assez générale pour trouver les sommes de séries de terme général une fraction rationnelle.

Exemple 6 (Série exponentielle) : $\forall z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \mapsto \exp(zx)$ est clairement de classe \mathcal{C}^{n+1} et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \mapsto z^n \exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0; 1]$ s'écrit :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leq x \leq 1} |z^{n+1} \exp(zx)|.$$

En notant $z = a + ib$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leq \exp(|a|)$ pour $0 \leq x \leq 1$.

On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement.

Proposition 2 : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve : La somme partielle associée à la série de terme général $\lambda u_n + v_n$ est $S_n = \sum_{k=0}^n (\lambda u_k + v_k)$.

La linéarité de la somme permet d'écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k.$$

Or, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel.

Donc, la suite $\left(\lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est également convergente i.e. la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge.

Il suffit alors d'utiliser la linéarité de l'application limite sur ce même espace :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k \right) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 21 : L'ensemble des séries convergentes bénéficie donc d'une structure d'espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte...

Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, il est possible que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ... L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Il est donc interdit de découper une somme de série en deux :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l'exemple (5) : La série $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ converge au contraire des deux séries $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$.

ATTENTION

Exemple 7 : D'après l' [exemple \(6\)](#) et la [proposition \(2\)](#) , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Corollaire 2.2 : Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes.

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ convergent.}$$

Exemple 8 : D'après l' [exemple \(6\)](#) et le [corollaire \(2.2\)](#) , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 4 : Après avoir démontré son existence, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$.

I.3 Condition nécessaire de convergence

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

$$\text{Proposition 3 : } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Preuve : Il suffit de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.

Par linéarité de la limite, si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente également et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0.$$

Le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0.

Par la contraposée, s'il ne le fait pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

Exemples 9 :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leq 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ de l' [exemple \(4\)](#) diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

ATTENTION

La réciproque est fautive comme le montre la divergence de la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$
 ou de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

II SÉRIES À TERME POSITIF

Le **théorème (9)** du **paragraphe (IV)** donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) *a fortiori* réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à *terme de signe constant*.

II.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 4 :

- Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M.$$

- Le seul cas de divergence est la limite infinie.

Preuve : Comme $\sum u_n$ est une série à terme positif la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite croissante.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de la limite monotone ... valable que dans \mathbb{R} donc !

Exemple 10 : La série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 11 : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

En effet, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.

La suite des sommes partielles est donc majorée. Elle converge vers un réel inférieur à 2. [3]

II.2 Critère de comparaison

Proposition 5 : Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à terme positif.

- (i) Si $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \leq v_n \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n) \end{cases}$ alors $\begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ diverge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ diverge.} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.} \end{cases}$
- (ii) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature (d'un point de vue de la convergence).

Dans les cas de convergence, à condition de faire attention aux indices de sommation, les inégalités comparaison sont maintenues pour les sommes.

Remarque : Notez bien que la clé de ce résultat est le **théorème (4)** qui nécessite ABSOLUMENT que les deux séries soient à terme de signe constant.

Dans le cas d'équivalence $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, si l'une est à terme positifs, l'autre le sera également à partir d'un certain rang. Il suffira donc de chercher le signe de l'une d'elle et, en général, celui de l'équivalent sera le plus simple.

┌ **Preuve :**

(i) Simple application du **théorème (4)** :

– Si la série $\sum v_n$ converge alors la suite des sommes partielles $\left(S_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc converge et on a même $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ par passage à la limite dans les inégalités.

Si l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang, la convergence est toujours assurée mais l'on perd, bien sûr, la comparaison des sommes.

De la même manière mais plus simplement, si $\sum u_n$ diverge alors la suite des sommes partielles $\left(S_n = \sum_{k=0}^n v_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$ donc diverge également vers $+\infty$. L'inégalité peut être vraie à partir d'un certain rang sans changer le résultat.

[3]. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ alors il existe un réel (positif) M tel que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq Mv_n$ et il suffit d'appliquer le point précédent.
 - A fortiori si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors pour tout réel strictement positif ε , il existe un rang à partir duquel $u_n \leq \varepsilon v_n$. Le résultat est encore vrai.
- (ii) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n)$ i.e. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - v_n| \leq \varepsilon v_n$. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient alors :

$$n \geq n_0 \implies \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

Il suffit alors d'appliquer le point précédent pour avoir le résultat :

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemples 12 :

- Les séries à terme positif $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ divergent par comparaison avec la série harmonique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}.$$

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ converge.

Preuve : Par prépondérance de l'exponentielle sur les fonctions puissances,

$$n^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, $e^{-\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente.

- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n2^n}$ converge.

Preuve : C'est une série à terme positif. De plus, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{\ln n}{n2^n} \leq \frac{A}{2^n},$$

qui est le terme d'une série géométrique convergente.

- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

Preuve : C'est une série à terme positif et on a $\frac{1}{1+2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série géométrique convergente.

ATTENTION

Le critère d'équivalence est faux si le terme général des deux séries n'est pas de signe constant comme le montre les séries de l'exercice (??).

Méthode I (Utiliser les critères de comparaison I) :

Soit $\sum u_n$ une série.

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$: Si v_n est de signe constant, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

En général, on aura $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ conférer la **proposition (7)**.

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ ou $o(v_n)$: À ce stade du cours, il est impératif de vérifier que u_n et v_n sont de signe positif. La **proposition (5)** ne s'applique que dans ce cas. Confer **méthode (5)**.

II.3 Comparaison Série-Intégrale

Soit $f : [0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}_+$ continue, positive et décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n). \quad (\text{XXVIII.1})$$

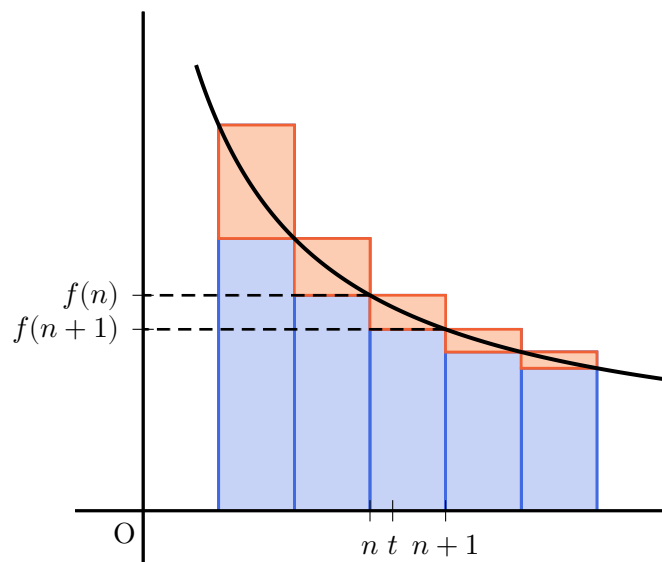


Figure XXVIII.1 – Une fonction continue positive et décroissante permet d'encadrer son intégrale.

Théorème 6 : Si $f : [0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, positive et décroissante alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature.

Remarque : Si f n'est pas continue en 0 ou si le terme général de la série n'est pas défini pour $n = 0$, le résultat du **théorème (6)** reste inchangé en remplaçant $\int_0^n f(t) dt$ par $\int_a^n f(t) dt$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve : En effet, d'après les inégalités (XXVIII.1) et la **proposition (5)**, les séries de terme positif $f(n)$ et $\int_n^{n+1} f(t) dt$ sont de même nature.

Or, d'après la **proposition (1)** la série de terme $\int_n^{n+1} f(t) dt = \underbrace{\int_0^{n+1} f(t) dt}_{u_{n+1}} - \underbrace{\int_0^n f(t) dt}_{u_n}$

est de même nature que la suite $\left(\underbrace{\int_0^n f(t) dt}_{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Donc, la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature.



Exercice 5 : Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Plus précisément, en pratique, vous écrirez plus souvent une succession d'inégalités conduisant au même résultat :

Méthode 2 (Encadrement d'une aire par des sommes) :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall k \geq n_0$ et $t \in [k; k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

$$\left(\sum_{k=n_0}^n f(k) \right) - f(n_0) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \left(\sum_{k=n_0}^n f(k) \right) - f(n)$$

Si f est croissante : $\forall k \geq n_0$ et $t \in [k; k+1]$,

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1)$$

$$\left(\sum_{k=n_0}^n f(k) \right) - f(n) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \left(\sum_{k=n_0}^n f(k) \right) - f(n_0)$$

Méthode 3 (Encadrement d'une somme par des aires) :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall k \geq n_0 + 1$,

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt$$

Si f est croissante : $\forall k \geq n_0 + 1$,

$$\int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt$$

$$f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt$$

Dans le cas divergent ou celui d'une fonction croissante, l'encadrement de la **méthode (3)** permet de trouver un équivalent des sommes partielles et cette méthode s'applique encore et souvent pour trouver des équivalents de restes de séries convergentes.

Exemples 13 : Vous montrerez sûrement (confer **exercice (13)**) que :

1 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$

3 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$.

2 $\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n).$

II.4 Séries de Riemann

Définition 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On appelle *série de Riemann* la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 7 : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

- Si $\alpha \leq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Or, la série harmonique est divergente.

D'après les critères de comparaison de séries à terme positifs, on en déduit que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge.}$$

Remarque : Si $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente.

- Supposons que $\alpha > 1$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Toutes les valeurs de la fonction ζ pour les entiers pairs sont bien connues depuis longtemps, et peuvent s'exprimer à l'aide des puissances paires de π et de nombres appelés nombres de Bernoulli qui sont très classiques en théorie des nombres (l'étude des nombres entiers).

Curieusement, les valeurs pour les entiers impairs ne s'expriment pas du tout aussi simplement, et on sait même très peu de choses sur elles. On a, par exemple, simplement réussi à démontrer que $\zeta(3)$ était un nombre irrationnel en 1977. Quelques progrès ont été effectués depuis puisqu'on sait désormais qu'une infinité des valeurs prises par la fonction ζ pour les entiers impairs sont irrationnelles, mais on ne sait pas lesquelles (on soupçonne qu'elles le sont toutes) !

La fonction ζ est par ailleurs fondamentale pour de nombreux problèmes mathématiques, et intervient notamment de façon centrale dans l'étude des propriétés des nombres premiers. Sans chercher à rentrer dans les détails (si vous êtes vraiment motivés, un simple coup d'oeil à la page Wikipedia consacrée à cette fonction devrait vous faire très peur), citons simplement le plus célèbre problème posé par cette fonction, qui reste un problème ouvert à l'heure actuelle (si vous arrivez à démontrer cette conjecture, un million de dollars pour vous) :

Conjecture de Riemann (1859) :

Les zéros non triviaux de la fonction ζ ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

Méthode 4 (Utilisation des séries de Riemann) :

Soit $\sum u_n$ une série à terme positif.

- Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve : Soit $\sum u_n$ une série à terme positif.

- Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, on en déduit que $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = +\infty$ alors $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$. Comme la série harmonique est divergente, il en est de même de $\sum u_n$.

II.5 Règle de D'Alembert

(Hors-Programme ?)

Lemme 1 : Soit $\sum u_n$ une série à terme **strictement** positif.

- 1 S'il existe $k \in]0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- 2 S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Preuve :

- 1 Supposons qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$.

Alors, $\forall n \geq n_0 + 1$,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq k^{n-n_0}.$$

D'où, $\forall n \geq n_0 + 1$, $u_n \leq k^{n-n_0} u_{n_0}$.

Comme $k \in]0, 1[$, la série $\sum k^{n-n_0} u_{n_0}$ converge.

D'après les critères de comparaison de séries à terme positif la série $\sum u_n$ converge.

2 Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $\forall n \geq n_0 + 1$, $u_n \geq u_{n_0} > 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut tendre vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On peut améliorer ce résultat un petit peu :

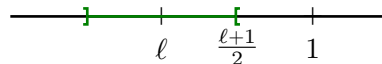
Proposition 8 : Soit $\sum u_n$ une série à terme **strictement** positif tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Alors,

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

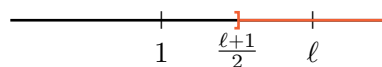
Preuve : Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors

- Si $\ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$ i.e. un voisinage de ℓ de rayon strictement inférieur à la distance entre ℓ et 1. Prendre $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$ dans la définition pour les sceptiques.



Donc la série $\sum u_n$ converge.

- Si $\ell > 1$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \geq 1$. Prendre $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$ dans la définition pour les sceptiques.



Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure :

la série divergente $\sum \frac{1}{n}$ et la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ entrent dans ce cas de figure.

Exemple 15 :

- $u_n = \frac{x^n}{n!}$ avec $x > 0$:

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

En prime, on en déduit que :

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!).$$

- $u_n = \frac{n!}{n^n}$:

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

En prime, on en déduit que :

$$\frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^n).$$

Remarque : Le critère de D'Alembert, séduisant à priori par sa simplicité d'utilisation, tombe très souvent sur le cas douteux. Il s'utilise principalement quand on se trouve en présence de factorielles ou de termes de nature géométrique du type a^n et, a fortiori, sera bien adapté à l'étude des séries entières que vous rencontrerez l'année prochaine.

Exercice 7 : Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{2.4.6 \dots (2n)}{n^n}$.

Correction : Critère de D'Alembert \Rightarrow CV.

III QUELQUES EXERCICES À SAVOIR FAIRE

III.1 Avec une fraction rationnelle

Exercice 8 : Calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Correction : L'exercice sous-entend que la série est convergente. Cela ne nous dédouane pas de le prouver. Il est assez évident de voir que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ terme général positif d'une série de Riemann convergente, on peut le montrer aussi directement en faisant bien attention de ne jamais manier de somme infini tant que nous n'aurons pas prouvé leur existence.

On effectue tout d'abord rapidement la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

De plus, $a = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = \frac{1}{2}$, $b = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) f(x) = -1$ et $c = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2) f(x) = \frac{1}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, 2S_n &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc la série converge et on a : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Remarque : Cette méthode, consistant à se servir de la décomposition en éléments simples et d'un changement d'indice, est assez générale pour trouver les sommes de séries de terme général une fraction rationnelle.

III.2 Avec les critères de comparaison

Exercice 9 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n2^n}$.

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est correctement défini et positif.

De plus, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée par un certain réel positif A et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{\ln n}{n2^n} \leq \frac{A}{2^n},$$

qui est le terme d'une série géométrique convergente.

D'après les critères de comparaison, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n2^n}$ converge.

Exercice 10 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

Correction : Pour $n \geq 2$, u_n est correctement défini et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ terme général positif d'une série de Riemann divergente.

Donc, la série de terme général u_n diverge.

Exercice 11 : Après avoir vérifié sa convergence, calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{n+1}{3^n}$.

Correction : D'après les théorèmes sur les croissances comparées, on a $u_n = \frac{n+1}{3^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Le terme général u_n de signe constant positif est donc négligeable devant celui d'une série de Riemann convergente et la série de terme général $\frac{n+1}{3^n}$ converge.

Posons alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$, ce qui est désormais légitime.

$$\text{Alors, } \frac{1}{3}S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

Comme $\frac{1}{3} < 1$, la série géométrique associée est convergente et on a :

$$= (S - 1) - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}.$$

On en déduit que $S = \frac{9}{4}$ i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}$.

III.3 Avec le critère de D'Alembert

Exercice 12 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$.

Correction : Pour $n \geq 1$, u_n est correctement défini et positif.

De plus,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge.

III.4 Avec un encadrement

Exercice 13 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

Correction : L'idée est de se ramener à une somme géométrique via une intégrale.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{\alpha k} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt - \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Il apparaît que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ pourrait bien être la limite cherchée. On encadre sa distance à notre série :

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt \leq \int_0^1 t^{\alpha(n+1)} dt \leq \frac{1}{\alpha(n+1)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Conclusion,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

Remarque :

- Pour $\alpha = 1$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.
- Pour $\alpha = 2$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Les amateurs pourront montrer le cas $\alpha = 3$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

III.5 Avec comparaison avec une intégrale

Exercice 14 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 1 Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.
- 2 Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Correction : Dans tous les cas, on va comparer à une intégrale.

- 1 On doit séparer les cas $\alpha \leq 0$ et $0 < \alpha < 1$.

Ⓐ Si $0 < \alpha < 1$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $k \geq 2$, on a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

L'inégalité de gauche étant encore valable pour $k = 1$. On somme l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n , et celle de droite pour k allant de 2 à n .

En rajoutant 1 à l'inégalité de droite, on trouve finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En intégrant, il vient

$$\frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1.$$

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \right) \leq S_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(1 + \frac{C}{n^{\alpha-1}} \right), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que :

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq 1 + \frac{C}{n^{\alpha-1}}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, $n^{1-\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et on en déduit, d'après le théorème d'encadrement, que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Ⓑ Si $\alpha \leq 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est, cette fois, croissante.

Le raisonnement est strictement identique, mais on doit inverser le sens des inégalités.

On obtient exactement le même résultat.

- 2 Le raisonnement est toujours identique, mais cette fois on doit intégrer la fonction $\frac{1}{x}$ dont une primitive est $\ln(x)$. On en déduit que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

L'année prochaine, vous pourrez obtenir un équivalent des reste dans le cas où $\alpha > 1$:

$$\text{« Spoil : » } \alpha > 1 \implies R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

IV SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES

On revient dans ce paragraphe aux séries de terme général quelconque.

IV.1 Condition suffisante de convergence

Définition 4 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} .

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Par linéarité de la somme et l'inégalité triangulaire, l'ensemble des séries absolument convergentes hérite aussi d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Théorème 9 (CA \Rightarrow CV) : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} .

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Preuve :

1 On suppose dans un premier temps que la série est à terme réel.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors
$$\begin{cases} u_n^+ = \max(0, u_n) \\ u_n^- = \max(0, -u_n) \end{cases}.$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, les séries à terme positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont donc convergentes. Soient l^+, l^- leurs limites.

On a
$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^- \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l^+ - l^- \text{ i.e. la série } \sum u_n \text{ converge.}$$

De plus, on a
$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| = |l^+ - l^-| \leq |l^+| + |l^-| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

2 Si la suite est à terme complexe, on pose $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} |a_n| \leq |u_n| \\ |b_n| \leq |u_n| \end{cases}.$$
 Par comparaison de séries à terme positif, les séries à terme réel $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes donc convergentes.

La stabilité de l'ensemble des suites convergente par combinaisons linéaires entraîne que la série $\sum u_n$ converge.

Comme $\forall N \in \mathbb{N}$,
$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$$
 par passage à la limite,
$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exemples 16 :

- $\sum z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$.
- $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

ATTENTION

La convergence de $\sum |u_n|$ est une condition suffisante pour que $\sum u_n$ converge.

Elle n'est pas nécessaire : il existe des séries $\sum u_n$ convergentes telles que $\sum |u_n|$ diverge. Ces séries sont appelées *semi-convergentes*.

Méthode 5 (Utiliser les critères de comparaison II) :

Soit $\sum u_n$ une série.

En complément de la **méthode (1)** : Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ avec $\sum v_n$ absolument convergente alors $\sum u_n$ converge (absolument).

En cas de divergence, on ne peut rien affirmer sans connaître le signe de u_n et v_n . Confer **méthode (1)**.

Preuve : Comme $u_n = O(v_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq Mv_n$.

Comme, par hypothèse, $\sum v_n$ converge, la série $\sum Mv_n$ converge également. Les deux séries $\sum |u_n|$ et $\sum Mv_n$ étant à terme positif on déduit de la relation de comparaison (par inégalité) que $\sum |u_n|$ converge.

Exercice 15 : Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^{\frac{3}{2}} + \cos(n)}$ converge.

Correction : Pour tout $n \geq 2$, on a $\left| \frac{\sin(n)}{n^{\frac{3}{2}} + \cos(n)} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ terme positif d'une série de Riemann convergente.

Par équivalence du terme général de deux séries à terme positif la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} + \cos(n)}$ converge.

Enfin, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^{\frac{3}{2}} + \cos(n)}$ converge absolument.

Conclusion : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^{\frac{3}{2}} + \cos(n)}$ converge.

IV.2 Séries semi-convergentes

(Hors-Programme)

Le théorème cité ci-dessous n'est pas forcément au programme de première année mais il le sera l'an prochain et nous permettra de donner des exemples et contre-exemples intéressants.

Théorème 10 (Critère spécial des séries alternées) : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0.

Alors,

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n u_n$ est convergente.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Les séries de la forme ci-dessus sont appelées *série alternées*. Ces séries fournissent des exemples faciles de séries convergentes non absolument divergentes. On parle de séries *semi-convergentes*.

On retient généralement le dernier point sous la forme : « Le reste est majoré par le premier terme négligé » en valeur absolue. Il est aussi bon de remarquer que la positivité des u_n donne le côté *alternée* de la série puisque la somme est systématiquement encadrée par deux termes consécutifs de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

Ce critère est aussi souvent appelé « *critère de Leibniz*^[4] ».

Preuve : La démonstration repose essentiellement sur le théorème des suites adjacentes en considérant les deux suites extraites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:

- Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0.$$

Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc respectivement décroissantes et croissantes.

- Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on a aussi $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Les deux suites extraites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc deux suites adjacentes convergentes vers la même limite ce qui équivaut à la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers celle-ci que l'on note dorénavant S .
- Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ étant adjacentes, on en déduit également les inégalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

On a alors $R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$, et son premier terme est $(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \leq 0$: $(R_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est du signe de son premier terme.

De plus, on a :

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}.$$

[4]. **Gottfried Wilhelm Leibniz**, né à Leipzig le 1^{er} juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716, est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, historien, bibliothécaire et philologue allemand. Esprit polymathe, personnalité importante de la période Frühaufklärung, il occupe une place primordiale dans l'histoire de la philosophie et l'histoire des sciences (notamment des mathématiques) et est souvent considéré comme le dernier « génie universel ».

Donc $|R_{2n}|$ est inférieur à la valeur absolue de son premier terme u_{2n+1} .

On procède de même pour $(R_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ en montrant que $|R_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}|$.

Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$.

Exemples 17 : Le théorème des séries alternées permet de montrer que des séries comme les séries de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ qui ne sont pas absolument convergentes, sont convergentes.

Exemple 18 : Je rappelle ici que l'étude de la nature d'une série n'a rien à voir avec la recherche de sa limite qui est souvent un tout autre problème.

Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

1 On peut aisément montrer sa convergence en utilisant le critère spécial des séries alternées :

Trivialement, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en décroissant donc le *critère spécial des séries alternées* entraîne la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.

2 Mais, on peut aussi directement montrer sa convergence vers une limite inspirée :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt = - \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} dt \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt = - \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Par passage à la limite sur } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -\ln 2.$$

Cette série, dite *série harmonique alternée*, donne un premier exemple de série convergente mais non absolument convergente. Un contre-exemple à garder en tête donc !

Exercice 16 : Montrer que la série de Riemann alternée $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$.

Correction : Pour $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.

$$\text{Pour } \alpha > 0, \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\alpha \leq 1.$$

La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante vers 0 donc le critère des séries alternées entraîne la convergence.

Remarque : Ce résultat n'est en fait réellement remarquable que pour $0 < \alpha \leq 1$. Les séries de Riemann alternées étant absolument convergentes pour $\alpha > 1$.

IV.3 Plan d'étude d'une série numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

- 1 Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
- 2 Si le terme général de la série est de signe constant :
 - a On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.
 - b On applique les théorèmes d'équivalence/domination/comparaison avec des séries de références (géométrique et Riemann).
- 3 Si le terme général de la série est de signe quelconque :
 - a On étudie la convergence absolue de la série.
 - b On étudie la semi-convergence de la série à l'aide du critère spécial des séries alternées ou, plus tard, des transformations d'Abel.
 - c On peut essayer d'effectuer un développement asymptotique de son terme général.

Exercice 17 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}.$$

- 1 Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.
- 2 En déduire l'existence d'un réel $k > 0$ tel que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} k \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}.$$

Correction :

$$\begin{aligned} \text{1} \quad v_n &= \ln \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1} \right] = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ à termes positifs est donc convergente.

Remarque : En sachant que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e$ i.e. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \right] = 0$, on pourrait être tenté d'aller plus vite en écrivant :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1} \right] = \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \right] + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

On trouverait alors que la série de terme v_n est divergente. Où est l'erreur ?

- 2 D'après la question précédente, la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de même nature que la série de termes $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = v_n$ est donc convergente vers un réel λ .

Par continuité de l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers un réel $e^\lambda = k > 0$ (le côté non nul est important pour l'équivalent) d'où l'équivalence demandée. [5]

[5]. En calculant k au moyen des intégrales de Wallis, par exemple, on retrouve la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Index

Combinaison

- linéaire
- de séries convergentes, 7

Condition

- nécessaire, 8
- suffisante, 23

Critère

- de D'Alembert, 26
- de divergence, 8
- spécial des séries alternées, 24

Fonction

- zêta, 15

Leibniz, 24

Méthode

- Comparaison série-intégrale, 13
- Utiliser les critères de comparaison, 12, 23
- Utiliser les séries de Riemann, 16

Nature

- d'une série, 3

Paradoxe

- d'Achille, 1

Reste

- d'une série, 3, 24

Somme

- d'une série, 2
- partielle, 2

Série

- absolument convergente, 22
- alternée, 24
- arithmétique, 4
- convergente, 2
- de Bertrand, 15
- de Riemann, 14
- divergente, 3
 - grossièrement, 8
- exponentielle, 6
- géométrique, 4
- harmonique, 4
 - alternée, 25
- semi-convergente, 24
- télescopique, 5
- à terme positif, 9

Terme général

- d'une série, 2, 24

Théorème

- d'encadrement, 6, 20, 21, 25
- de la limite monotone, 9

Zénon d'Élée, 1