XXVIII
Séries numériques

Contenu

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Séries numériques

I.1 Suites des sommes partielles

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle *série de terme général* u_n, notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

  - u_n s'appelle le *terme général* de rang n.
  - S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n.

- On dit que *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge* lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

◇ la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée *somme de la série* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n.$$

◇ On appelle *reste de rang n* l'élément R_n défini par :

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarques et commentaires :

— Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.

— Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la n$^{\text{ème}}$ somme partielle.

— Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

ATTENTION | Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

— Enfin, remarquez que $\boxed{\mathrm{S}_0 = u_0 \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}.}$

Par exemple, si on sait que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $\mathrm{S}_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$, alors $\mathrm{S}_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = \left(1-\dfrac{1}{n+2}\right) - \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

I.2 Premiers exemples

Exemple 1 : Les *séries arithmétiques* de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} na$ où a est une constante sont toujours divergentes dès que $a \neq 0$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}a.$$

Exemple 2 : Les *séries géométriques* de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ où z est un nombre complexes sont convergentes si, et seulement si $|z| < 1$ et on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ |z|<1}]{} \frac{1}{1-z}.}$$

De plus, lorsque $|z| < 1$, on a $\boxed{R_n = \frac{z^{n+1}}{1-z}.}$

Remarque : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$. C'est, à une constante multiplicative près, le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue.

Exercice 1 (Séries géométriques & Co) :

1. (a) Déterminer $\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$.
   (b) En déduire la nature de $\sum nx^{n-1}$ selon les valeurs de x.
   (c) Lorsque la série converge, déterminer sa somme.
2. Même question pour $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$, puis $\sum_{n\geqslant 2} n^2x^{n-2}$.
3. Déterminer la nature et la somme de $\sum \frac{n^2+3n}{2^n}$.

Exemple 3 : *La série harmonique* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. [1]

Preuve : Les manières de montrer ce résultat sont nombreuses.
On a, par exemple,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la série convergeait vers un réel S, on aurait alors, par passage à la limite, $0 = S - S \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.

Donc H_n diverge mais on ne sait pas encore si elle a une limite. Patientez jusqu'à l' exemple (10) !

Exemple 4 : On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n$.

On exprime les sommes partielles : $\forall N \in \mathbb{N},\quad S_N = \sum_{k=0}^{n} u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$

On en déduit que la série $\sum(-1)^n$ diverge.

Exemple 5 : Les *séries télescopiques* de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1}-u_n)$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Par exemple, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$.

$$\begin{aligned}\text{En effet, } \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\dots-\cancel{\frac{1}{n}}\Big)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.\end{aligned}$$

Proposition 1 (Série télescopique) : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\Big(u_{n+1}-u_n\Big)$ sont de même nature et on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\Big(u_{k+1}-u_k\Big)=u_{n+1}-u_0.$$

Exercice 2 : Étudier les séries de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 3 :

1. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle
$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x+1)},\ \text{sur }]0,+\infty[.$$
2. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{3}{4}$.

Exemple 6 (Série exponentielle) : $\forall\, z\in\mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum\dfrac{z^n}{n!}$ est convergente et on a :

$$\boxed{\forall\, z\in\mathbb{C},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\exp(z).}$$

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, la fonction $f : x\longmapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x\longmapsto z^n\exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left|f(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|=\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|z^{n+1}\exp(zx)\right|.$$

En notant $z=a+\mathrm{i}\,b$, on obtient $|\exp(zx)|=\exp(ax)\leqslant\exp(|a|)$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$.

On en déduit :
$$\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|a|)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement.

Proposition 2 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve : *La somme partielle associée à la série de terme général* $\lambda u_n + v_n$ *est* $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k)$.
La linéarité de la somme permet d'écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Or, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel.

Donc, la suite $\left(\lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est également convergente i.e. la série* $\sum(\lambda u_n + v_n)$ *converge.*

Il suffit alors d'utiliser la linéarité de l'application limite sur ce même espace :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k\right) = \lambda \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Corollaire 2.1 : L'ensemble des séries convergentes bénéficie donc d'une structure d'espace vectoriel.

ATTENTION

Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, il est possible que $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ...
L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Retenez pour cela l' exemple (5) : La série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge au contraire des deux séries $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$.

Exemple 7 : D'après l' exemple (6) et la proposition (2) , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Corollaire 2.2 : Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes.

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ convergent.}$$

Exemple 8 : D'après l' exemple (6) et le corollaire (2.2) , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 4 : Après avoir démontré son existence, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$.

I.3 Condition nécessaire de convergence

Proposition 3 : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge $\implies \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve : Il suffit de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$.
Par linéarité de la limite, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente également et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$.

Exemples 9 :

- Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leqslant 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ de l' exemple (4) diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre la divergence de la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ ou de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

II Séries à terme positif

II.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 4 :

- Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge } \iff \exists \mathrm{M} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_n \leqslant \mathrm{M}.$$

- Le seul cas de divergence est la limite infinie.

Preuve : Comme $\sum u_n$ est une série à terme positif la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite croissante.
Il suffit alors d'appliquer le théorème de la limite monotone … valable que dans $\mathbb{R}$ donc !

Exemple 10 : La série harmonique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 11 : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

En effet, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.

La suite des sommes partielles est donc majorée. Elle converge vers un réel inférieur à 2. [2]

II.2 Critère de comparaison

Proposition 5 : Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à terme positif.

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right) \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(v_n\right) \end{cases}$ alors $\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ diverge.} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ converge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.} \end{cases}$

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature (d'un point de vue de la convergence).

[2]. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans les cas de convergence, à condition de faire attention aux indices de sommation, les inégalités comparaison sont maintenues pour les sommes.

Preuve :

(i) Simple application du **théorème** (4) :

- Si la série $\sum v_n$ converge alors la suite des sommes partielles $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc converge et on a même $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ par passage à la limite dans les inégalités.

  Si l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang, la convergence est toujours assurée mais l'on perd, bien sûr, la comparaison des sommes.

  De la même manière mais plus simplement, si $\sum u_n$ diverge alors la suite des sommes partielles $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$ donc diverge également vers $+\infty$. L'inégalité peut être vraie à partir d'un certain rang sans changer le résultat.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors il existe un réel (positif) M tel que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant \mathrm{M}v_n$ et il suffit d'appliquer le point précédent.
- A fortiori si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors pour tout réel strictement positif ε, il existe un rang à partir duquel $u_n \leqslant \varepsilon v_n$. Le résultat est encore vrai.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$ i.e. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon v_n$. En prenant $\epsilon = \frac{1}{2}$, on obtient alors :

$$n \geqslant n_0 \implies \frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n.$$

Il suffit alors d'appliquer le point précédent pour avoir le résultat :

$$\text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ alors } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

Exemples 12 :

- Les séries à terme positif $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$ divergent par comparaison avec la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ converge.

Preuve : Par prépondérance de l'exponentielle sur les fonctions puissances,

$$n^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, $e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente.

- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n2^n}$ converge.

Preuve : C'est une série à terme positif. De plus, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{\ln n}{n2^n} \leqslant \frac{A}{2^n},$$

qui est le terme d'une série géométrique convergente.

- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

Preuve : C'est une série à terme positif et on a $\frac{1}{1+2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série géométrique convergente.

ATTENTION Le critère d'équivalence est faux si le terme général des deux séries n'est pas de signe constant comme le montre les séries de l' exercice (??) .

Méthode I (Utiliser les critères de comparaison I) :
Soit $\sum u_n$ une série.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$: Si v_n est de signe constant, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

En général, on aura $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ confer la proposition (7) .

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ **ou** $\mathrm{o}(v_n)$: À ce stade du cours, il est impératif de vérifier que u_n et v_n sont de signe positif. La proposition (5) ne s'applique que dans ce cas. Confer méthode (5) .

II.3 Comparaison Série-Intégrale

Soit $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ **continue**, **positive** et **décroissante**.

Pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n). \qquad \text{(XXVIII.1)}$$

Théorème 6 : Si $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction **continue**, **positive** et **décroissante** alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

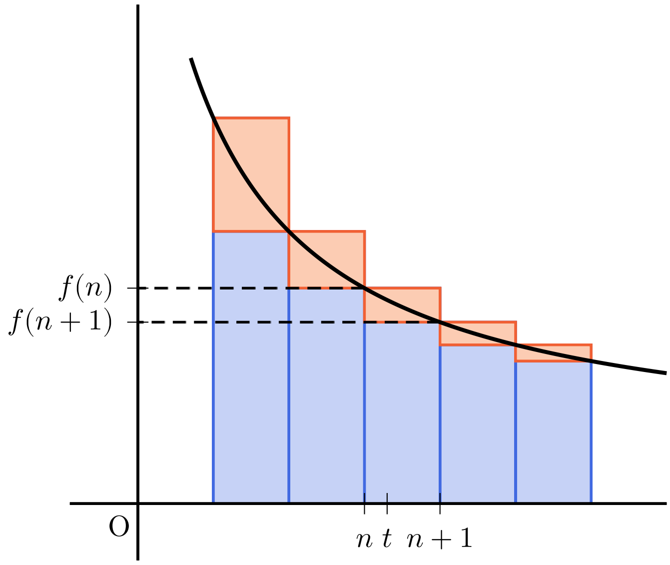


Figure XXVIII.1 – Une fonction continue positive et décroissante permet d'encadrer son intégrale.

Remarque : Si f n'est pas continue en 0 ou si le terme général de la série n'est pas défini pour $n=0$, le résultat du théorème (6) reste inchangé en remplaçant $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ par $\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve : En effet, d'après les inégalités (XXVIII.1) et la proposition (5), les séries de terme positif $f(n)$ et $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or, d'après la proposition (1) la série de terme $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{u_{n+1}} - \underbrace{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}_{u_n}$

est de même nature que la suite $\left(\underbrace{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}_{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc, la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Exercice 5 : Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$.

Méthode 2 (Encadrement d'une aire par des sommes) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall\, k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,;k+1]$,

$$\begin{array}{rcccl} f(k+1) & \leqslant & f(t) & \leqslant & f(k) \\ f(k+1) & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & f(k) \\ \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n_0) & \leqslant & \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n) \end{array}$$

Si f est croissante : $\forall\, k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,;k+1]$,

$$\begin{array}{rcccl} f(k) & \leqslant & f(t) & \leqslant & f(k+1) \\ f(k) & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & f(k+1) \\ \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n) & \leqslant & \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \left(\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n_0) \end{array}$$

Méthode 3 (Encadrement d'une somme par des aires) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall\, k \geqslant n_0+1$,

$$\begin{array}{rcccl} \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & f(k) & \leqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) & \leqslant & f(n_0) + \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Si f est croissante : $\forall\, k \geqslant n_0+1$,

$$\begin{array}{rcccl} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & f(k) & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ f(n_0) + \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) & \leqslant & \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Exemples 13 : Vous montrerez sûrement (*confer* exercice (13)) que :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$.

II.4 Séries de Riemann

Définition 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On appelle *série de Riemann* la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 7 : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

- Si $\alpha \leqslant 1$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$

  Or, la série harmonique est divergente.

  D'après les critères de comparaison de séries à terme positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

  Remarque : Si $\alpha \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.

- Supposons que $\alpha > 1$.

  La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

  D'après le théorème (6) de comparaison série-intégrale, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est donc de même nature que la suite $\left(u_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Comme f est à valeurs positives, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Sa convergence ne dépendant donc que d'une majoration de u_n.

  Or, $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} < +\infty.$

  Donc la suite $\left(\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série de terme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ convergent.

Exemples 14 :

1. La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
2. $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ convergent. $\quad\sum \dfrac{1}{n^{1,0000000000000001}}$ converge.
3. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ divergent. $\quad\sum \dfrac{1}{n^{0,99999999999999999}}$ diverge.

Exercice 6 (Séries de Bertrand) : Soit $(\alpha; \beta)$ un couple de réels.

Montrer que la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge $\iff \alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Méthode 4 (Utilisation des séries de Riemann) :
Soit $\sum u_n$ une série à terme positif.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve : Soit $\sum u_n$ une série à terme positif.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, on en déduit que $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = +\infty$ alors $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o(u_n)$. Comme la série harmonique est divergente, il en est de même de $\sum u_n$.

II.5 Règle de D'Alembert (Hors-Programme ?)

Lemme 1 : Soit $\sum u_n$ une série *à terme **strictement** positif.*

1. S'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Preuve :

1. Supposons qu'il existe $k \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$.

   Alors, $\forall\, n \geqslant n_0 + 1$,
   $$\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leqslant k^{n-n_0}.$$
   D'où, $\forall\, n \geqslant n_0 + 1$, $u_n \leqslant k^{n-n_0} u_{n_0}$.

   Comme $k \in]0,1[$, la série $\sum k^{n-n_0} u_{n_0}$ converge.

   D'après les critères de comparaison de séries à terme positif la série $\sum u_n$ converge.
2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $\forall\, n \geqslant n_0 + 1$, $u_n \geqslant u_{n_0} > 0$.

   La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut tendre vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 8 : Soit $\sum u_n$ une série *à terme **strictement** positif* tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

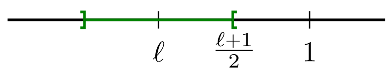
Alors,

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

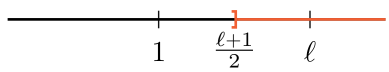
Preuve : Supposons que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors

– Si $\ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que $\forall\, n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{\ell+1}{2} < 1$ i.e. un voisinage de ℓ de rayon strictement inférieur à la distance entre ℓ et 1. Prendre $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$ dans la définition pour les sceptiques.



Donc la série $\sum u_n$ converge.

– Si $\ell > 1$, il existe un rang n_0 tel que $\forall\, n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{\ell+1}{2} \geqslant 1$. Prendre $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2} > 0$ dans la définition pour les sceptiques.



Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

– Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure :

la série divergente $\sum \dfrac{1}{n}$ et la série convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$ entrent dans ce cas de figure.

Exemple 15 :

- $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ avec $x > 0$:

  On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

  En prime, on en déduit que :

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff x^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(n!)\,.$$

- $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$:

  On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{e} < 1$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

  En prime, on en déduit que :

$$\frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff n! \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(n^n)\,.$$

Exercice 7 : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{2.4.6\dots(2n)}{n^n}$.

III Quelques exercices à savoir faire

III.1 Avec une fraction rationnelle

Exercice 8 : Calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

III.2 Avec les critères de comparaison

Exercice 9 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{\ln n}{n2^n}$.

Exercice 10 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 11 : Après avoir vérifié sa convergence, calculer la somme de la série de terme général $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$.

III.3 Avec le critère de D'Alembert

Exercice 12 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{n^2}{(n-1)!}$.

III.4 Avec un encadrement

Exercice 13 : Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

III.5 Avec comparaison avec une intégrale

Exercice 14 : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha<1$, déterminer un équivalent de $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha=1$, déterminer un équivalent de $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

IV Séries absolument convergentes

IV.1 Condition suffisante de convergence

Définition 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 9 (CA $\implies$ CV) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Preuve :

1. On suppose dans un premier temps que la série est à terme réel.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose alors $\begin{cases} u_n^+ = \max(0, u_n) \\ u_n^- = \max(0, -u_n) \end{cases}$.

On a donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \\ 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n| \end{cases}$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}$.

Comme $\sum |u_n|$ converge, les séries à terme positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont donc convergentes. Soient ℓ^+, ℓ^- leurs limites.

On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ - \sum_{k=0}^{n} u_k^- \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^+ - \ell^-$ i.e. la série $\sum u_n$ converge.

De plus, on a $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| = |\ell^+ - \ell^-| \leqslant |\ell^+| + |\ell^-| = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

2. Si la suite est à terme complexe, on pose $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

On a $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} |a_n| \leqslant |u_n| \\ |b_n| \leqslant |u_n| \end{cases}$. Par comparaison de séries à terme positif les séries à terme réel $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes donc convergentes.

La stabilité de l'ensemble des suites convergente par combinaisons linéaires entraîne que la série $\sum u_n$ converge.

Comme $\forall\, N\in\mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} |u_n|$, par passage à la limite, $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Exemples 16 :

- $\sum z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$.
- $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$.

ATTENTION

La convergence de $\sum |u_n|$ est une condition suffisante pour que $\sum u_n$ converge.

Elle n'est pas nécessaire : il existe des séries $\sum u_n$ convergentes telles que $\sum |u_n|$ diverge. Ces séries sont appelées *semi-convergentes*.

Méthode 5 (Utiliser les critères de comparaison II) :
Soit $\sum u_n$ une série.

En complément de la méthode (1) : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ avec $\sum v_n$ absolument convergente alors $\sum u_n$ converge (absolument).

En cas de divergence, on ne peut rien affirmer sans connaître le signe de u_n et v_n. Confer méthode (1) .

Preuve : Comme $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}v_n$.
Comme, par hypothèse, $\sum v_n$ converge, la série $\sum \mathrm{M}v_n$ converge également. Les deux séries $\sum |u_n|$ et $\sum \mathrm{M}v_n$ étant à terme positif on déduit de la relation de comparaison (par inégalités) que $\sum |u_n|$ converge.

Exercice 15 : Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^{\frac{3}{2}} + \cos(n)}$ converge.

IV.2 Séries semi-convergentes (Hors-Programme)

Théorème 10 (Critère spécial des séries alternées) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0.

Alors,

- La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ est convergente.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $\left|\mathrm{R}_n\right| \leqslant u_{n+1}$.

Les séries de la forme ci-dessus sont appelées *série alternées*. Ces séries fournissent des exemples faciles de séries convergentes non absolument divergentes. On parle de séries *semi-convergentes*.

On retient généralement le dernier point sous la forme : « Le reste est majoré par le premier terme négligé » en valeur absolue. Il est aussi bon de remarquer que la positivité des u_n donne le côté *alternée* de la série puisque la somme est systématiquement encadrée par deux termes consécutifs de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_{2n+1} \leqslant \mathrm{S} \leqslant \mathrm{S}_{2n}.$$

Ce critère est aussi souvent appelé « *critère de Leibniz*[3] ».

Preuve : La démonstration repose essentiellement sur le théorème des suites adjacentes en considérant les deux suites extraites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:

[3]. **Gottfried Wilhelm Leibniz**, né à Leipzig le 1er juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716, est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, historien, bibliothécaire et philologue allemand. Esprit polymathe, personnalité importante de la période Frühaufklärung, il occupe une place primordiale dans l'histoire de la philosophie et l'histoire des sciences (notamment des mathématiques) et est souvent considéré comme le dernier « génie universel ».

- Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :
$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0.$$
Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc respectivement décroissantes et croissantes.
- Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on a aussi $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc deux suites adjacentes convergentes vers la même limite ce qui équivaut à la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers celle-ci que l'on note dorénavant S.
- Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes, on en déduit également les inégalités suivantes :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}.$$
On a alors $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$, et son premier terme est $(-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1} \leqslant 0$: $(R_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est du signe de son premier terme.

De plus, on a :
$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}.$$
Donc $|R_{2n}|$ est inférieur à la valeur absolue de son premier terme u_{2n+1}.

On procède de même pour $(R_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$. en montrant que $|R_{2n+1}| \leqslant |u_{2n+2}|$.

Conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Exemples 17 : Le théorème des séries alternées permet de montrer que des séries comme les séries de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $(-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ qui ne sont pas absolument convergentes, sont convergentes.

Exemple 18 : Je rappelle ici que l'étude de la nature d'une série n'a rien à voir avec la recherche de sa limite qui est souvent un tout autre problème.

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

1. On peut aisément montrer sa convergence en utilisant le critère spécial des séries alternées :

   Trivialement, $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant donc le *critère spécial des séries alternées* entraîne la convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. Mais, on peut aussi directement montrer sa convergence vers une limite inspirée :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\,dt$$
$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
   D'où $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

   Par passage à la limite sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\ln 2.$

Cette série, dite *série harmonique alternée*, donne un premier exemple de série convergente mais non absolument convergente. Un contre-exemple à garder en tête donc !

Exercice 16 : Montrer que la série de Riemann alternée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$.

IV.3 Plan d'étude d'une série numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0 sinon on invoquera la divergence grossière.
2. Si le terme général de la série est de signe constant :
   a. On regarde si le critère de D'Alembert ne tombe pas dans le cas douteux.
   b. On applique les théorèmes d'équivalence/domination/comparaison avec des séries de références (géométrique et Riemann).
3. Si le terme général de la série est de signe quelconque :
   a. On étudie la convergence absolue de la série.
   b. On étudie la semi-convergence de la série à l'aide du critère spécial des séries alternées ou, plus tard, des transformations d'Abel.
   c. On peut essayer d'effectuer un développement asymptotique de son terme général.

Exercice 17 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire l'existence d'un réel $k > 0$ tel que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} k\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$