Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

I En dimension quelconque

1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

- a ☐ $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$
- b ☐ $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} u^2$
- c ☐ $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} u^2 = \{0\}$
- d ☐ $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2 = \mathrm{E}$

2 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E,

- a ☐ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$
- b ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$
- c ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
- d ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3 Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F.

- a ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$
- b ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$
- c ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$
- d ☐ v n'est pas forcément linéaire

4 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace vectoriel de E. A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

- a ☐ si $\ker u = \mathrm{F}$
- b ☐ si $\mathrm{F} \not\subset \ker u$
- c ☐ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \{0\}$
- d ☐ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \emptyset$

5 Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas linéaire ?

- a ☐ $f \mapsto g \circ f$
- b ☐ $f \mapsto f \circ g$
- c ☐ $f \mapsto f + g$
- d ☐ $f \mapsto g \circ f \circ g$

6 Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :

- a ☐ λx^n
- b ☐ $\lambda^n x$
- c ☐ λx
- d ☐ $\lambda^n x^n$

7 Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

- a ☐ $\ker u \subset \ker u^2$
- b ☐ $\ker u \supset \ker u^2$
- c ☐ $\ker u = \ker u^2$
- d ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

8 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

a) ☐ $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$
b) ☐ $u = \mathrm{I}d$
c) ☐ $\operatorname{Im} v \subset \ker u$
d) ☐ $u|_{\operatorname{Im} v} = \mathrm{I}d$

9. Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

a) ☐ $(x, y) \mapsto (y, x)$
b) ☐ $(x, y) \mapsto (1, 0)$
c) ☐ $(x, y) \mapsto (0, x)$
d) ☐ $(x, y) \mapsto (0, y)$

10. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $u^2 = \mathrm{I}d$, que vaut $(u^2 + u)^2$?

a) ☐ $2\mathrm{I}d$
b) ☐ $2u$
c) ☐ $2\mathrm{I}d + 2u$
d) ☐ $\mathrm{I}d + u^2$

11. Lequel des ensembles suivants de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

a) ☐ l'ensemble des projecteurs
b) ☐ l'ensemble des symétries
c) ☐ l'ensemble des endomorphismes non nuls
d) ☐ l'ensemble des homothéties

II En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $u \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

a) ☐ $\dim \mathrm{E}$
b) ☐ $\operatorname{rg} v$
c) ☐ $\operatorname{rg} u$
d) ☐ $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} v^{-1}$

2. Soit u un endomorphisme de E de rang r. Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

a) ☐ r^2
b) ☐ $2r$
c) ☐ r
d) ☐ $r - 2$

3. Si E est de dimension n, la dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est

a) ☐ n^2
b) ☐ n
c) ☐ 2^n
d) ☐ $2n$

4. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Combien y a-t-il d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui échangent e_1 et e_2 ?

a) ☐ aucun
b) ☐ 1
c) ☐ 2
d) ☐ une infinité

5. Soient f, g deux endomorphismes de E. Laquelle des conditions suivantes implique que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$?

a) ☐ $f^2 = g^2$
b) ☐ $f \circ g = g \circ f$
c) ☐ $\ker f = \ker g$
d) ☐ $\operatorname{rg}(f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \operatorname{rg}(g + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$

6. Soit f une forme linéaire sur E et u dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Laquelle des applications suivantes est aussi une forme linéaire sur E ?

a) ☐ $f \circ u$ b) ☐ $u \circ f$ c) ☐ $f \circ f$ d) ☐ $f \times f$

7 Soit A une famille de vecteurs de E. A quelle condition peut-on trouver un endomorphisme de E qui s'annule en tout vecteur de A mais qui n'est pas identiquement nul ?

a) ☐ si A est libre
b) ☐ si A est génératrice
c) ☐ si A n'est pas libre
d) ☐ si A n'est pas génératrice

8 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?

a) ☐ $u = v$
b) ☐ $\ker u = \ker v$
c) ☐ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$
d) ☐ u et v sont surjectives

9 Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement

a) ☐ injective
b) ☐ surjective
c) ☐ constante
d) ☐ un projecteur

10 Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

a) ☐ si u est injectif, alors u est bijectif.
b) ☐ s'il existe $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, alors u est bijectif
c) ☐ si $u + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est bijectif, alors u est bijectif
d) ☐ si u^2 est bijectif, alors u est bijectif

11 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $u = 0$?

a) ☐ $u^2 = 0$
b) ☐ $u \circ v = 0$ et $v \neq 0$
c) ☐ $v \circ u = 0$ et $\operatorname{Im} v = \mathrm{E}$
d) ☐ $u \circ v = v \circ u$

12 Si E est de dimension n, l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$ est de dimension

a) ☐ $2n^2$ b) ☐ n^4 c) ☐ 2^{2^n} d) ☐ 4^n

13 Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. Alors

a) ☐ $\operatorname{Im} u = \mathrm{F}$
b) ☐ la restriction de u à F est l'identité
c) ☐ la restriction de u à F est un automorphisme de F
d) ☐ $\mathrm{F} \subset \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$

14 Soient f, g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f = 0$. Alors

a) ☐ $f = 0$ ou $g = 0$
b) ☐ $\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg} g$
c) ☐ $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} f$
d) ☐ $\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f \leqslant n$

15 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à 4 tels que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P} = 0$?

(a) ☐ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ 3 (d) ☐ 4

16 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors

(a) ☐ v est bijectif
(b) ☐ v est nul
(c) ☐ $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$
(d) ☐ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

17 Soit u un endomorphisme de E et v la restriction de u à $\operatorname{Im} u$. A quelle condition v est-il un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur lui-même ?

(a) ☐ c'est toujours le cas
(b) ☐ lorsque $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont supplémentaires
(c) ☐ lorsque $\ker u = \operatorname{Im} u$
(d) ☐ lorsque u n'est pas nul

18 Soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E. On suppose que u est un endomorphisme de E qui vérifie $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, …, $u(e_{p-1}) = e_p$ et $u(e_p) = e_1$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que u est bijectif ?

(a) ☐ $p \geqslant \dim \mathrm{E}$
(b) ☐ $p = \dim \mathrm{E}$
(c) ☐ $(e_1, \dots, e_p)$ est libre
(d) ☐ $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice

19 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$?

(a) ☐ n (b) ☐ $n-1$ (c) ☐ $n/2$ (d) ☐ 1