Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

I En dimension quelconque

1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

a ☐ $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$
b ☑ $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} u^2$
c ☐ $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} u^2 = \{0\}$
d ☐ $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2 = \mathrm{E}$

2 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E,

a ☑ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$
b ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$
c ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
d ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3 Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F.

a ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$
b ☑ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$
c ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$
d ☐ v n'est pas forcément linéaire

4 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace vectoriel de E. A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

a ☐ si $\ker u = \mathrm{F}$
b ☐ si $\mathrm{F} \not\subset \ker u$
c ☑ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \{0\}$
d ☐ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \emptyset$

5 Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas linéaire ?

a ☐ $f \mapsto g \circ f$
b ☐ $f \mapsto f \circ g$
c ☑ $f \mapsto f + g$
d ☐ $f \mapsto g \circ f \circ g$

6 Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :

a ☐ λx^n
b ☑ $\lambda^n x$
c ☐ λx
d ☐ $\lambda^n x^n$

7 Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

a ☑ $\ker u \subset \ker u^2$
b ☐ $\ker u \supset \ker u^2$
c ☐ $\ker u = \ker u^2$
d ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

8 Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

(a) ☐ $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$
(b) ☐ $u = \mathrm{Id}$
(c) ☐ $\operatorname{Im} v \subset \ker u$
(d) ☑ $u|_{\operatorname{Im} v} = \mathrm{Id}$

9 Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

(a) ☐ $(x, y) \mapsto (y, x)$
(b) ☐ $(x, y) \mapsto (1, 0)$
(c) ☐ $(x, y) \mapsto (0, x)$
(d) ☑ $(x, y) \mapsto (0, y)$

10 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $u^2 = \mathrm{I}d$, que vaut $(u^2 + u)^2$?

(a) ☐ $2\mathrm{I}d$
(b) ☐ $2u$
(c) ☑ $2\mathrm{I}d + 2u$
(d) ☐ $\mathrm{I}d + u^2$

11 Lequel des ensembles suivants de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

(a) ☐ l'ensemble des projecteurs
(b) ☐ l'ensemble des symétries
(c) ☑ l'ensemble des endomorphismes non nuls
(d) ☐ l'ensemble des homothéties

II En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1 Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $u \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

(a) ☐ $\dim \mathrm{E}$
(b) ☑ $\operatorname{rg} v$
(c) ☐ $\operatorname{rg} u$
(d) ☐ $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} v^{-1}$

2 Soit u un endomorphisme de E de rang r. Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

(a) ☐ r^2 (b) ☐ $2r$ (c) ☑ r (d) ☐ $r - 2$

3 Si E est de dimension n, la dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est

(a) ☑ n^2 (b) ☐ n (c) ☐ 2^n (d) ☐ $2n$

4 Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Combien y a-t-il d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui échangent e_1 et e_2 ?

(a) ☐ aucun (b) ☑ 1 (c) ☐ 2 (d) ☐ une infinité

5 Soient f, g deux endomorphismes de E. Laquelle des conditions suivantes implique que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$?

(a) ☐ $f^2 = g^2$
(b) ☐ $f \circ g = g \circ f$
(c) ☑ $\ker f = \ker g$
(d) ☐ $\operatorname{rg}(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \operatorname{rg}(g + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$

6 Soit f une forme linéaire sur E et u dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Laquelle des applications suivantes est aussi une forme linéaire sur E ?

a ☑ $f \circ u$ b ☐ $u \circ f$ c ☐ $f \circ f$ d ☐ $f \times f$

7 Soit A une famille de vecteurs de E. A quelle condition peut-on trouver un endomorphisme de E qui s'annule en tout vecteur de A mais qui n'est pas identiquement nul ?

a ☐ si A est libre
b ☐ si A est génératrice
c ☐ si A n'est pas libre
d ☑ si A n'est pas génératrice

8 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?

a ☐ $u = v$
b ☐ $\ker u = \ker v$
c ☑ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$
d ☐ u et v sont surjectives

9 Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement

a ☐ injective
b ☑ surjective
c ☐ constante
d ☐ un projecteur

10 Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

a ☐ si u est injectif, alors u est bijectif.
b ☐ s'il existe $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, alors u est bijectif
c ☐ si $u + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est bijectif, alors u est bijectif
d ☐ si u^2 est bijectif, alors u est bijectif

11 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $u = 0$?

a ☐ $u^2 = 0$
b ☐ $u \circ v = 0$ et $v \neq 0$
c ☑ $v \circ u = 0$ et $\operatorname{Im} v = \mathrm{E}$
d ☐ $u \circ v = v \circ u$

12 Si E est de dimension n, l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$ est de dimension

a ☐ $2n^2$ b ☑ n^4 c ☐ 2^{2^n} d ☐ 4^n

13 Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. Alors

a ☐ $\operatorname{Im} u = \mathrm{F}$
b ☐ la restriction de u à F est l'identité
c ☑ la restriction de u à F est un automorphisme de F
d ☐ $\mathrm{F} \subset \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$

14 Soient f, g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f = 0$. Alors

a ☐ $f = 0$ ou $g = 0$
b ☐ $\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg} g$
c ☐ $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} f$
d ☑ $\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f \leqslant n$

15 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à 4 tels que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P} = 0$?

(a) ☐ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ 3 (d) ☑ 4

16 Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $\mathrm{rg}\,(v \circ u) = \mathrm{rg}\,u$. Alors

(a) ☐ v est bijectif
(b) ☐ v est nul
(c) ☑ $\ker v \cap \mathrm{Im}\,u = \{0\}$
(d) ☐ $\mathrm{Im}\,v \cap \mathrm{Im}\,u = \{0\}$

17 Soit u un endomorphisme de E et v la restriction de u à $\mathrm{Im}\,u$. A quelle condition v est-il un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,u$ sur lui-même ?

(a) ☐ c'est toujours le cas
(b) ☑ lorsque $\mathrm{Im}\,u$ et $\ker u$ sont supplémentaires
(c) ☐ lorsque $\ker u = \mathrm{Im}\,u$
(d) ☐ lorsque u n'est pas nul

18 Soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E. On suppose que u est un endomorphisme de E qui vérifie $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, …, $u(e_{p-1}) = e_p$ et $u(e_p) = e_1$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que u est bijectif ?

(a) ☐ $p \geqslant \dim \mathrm{E}$
(b) ☐ $p = \dim \mathrm{E}$
(c) ☐ $(e_1, \dots, e_p)$ est libre
(d) ☑ $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice

19 Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$?

(a) ☑ n (b) ☐ $n - 1$ (c) ☐ $n/2$ (d) ☐ 1

Index