Séries numériques

Une seule réponse exacte par question.

1 Combien vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$?

(a) ☐ $\frac{3}{2}$ (b) ☐ $\frac{1}{2}$ (c) ☐ $\frac{3}{4}$ (d) ☐ $\frac{1}{4}$

2 Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{sh} n}{a^n}$ est-elle convergente ?

(a) ☐ toutes (b) ☐ $a \geqslant 1$ (c) ☐ $a > 1$ (d) ☐ $a > e$

3 Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\sum \ln(u_n)$ converge.
Quelle série n'est pas nécessairement convergente ?

(a) ☐ $\sum u_n$
(c) ☐ $\sum \frac{u_n}{2^n}$
(b) ☐ $\sum e^{-nu_n}$
(d) ☐ $\sum (u_{n+1} - u_n)$

4 Soit $\alpha > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si, et seulement si

(a) ☐ $\alpha > 1$ (b) ☐ $\alpha > \frac{1}{2}$ (c) ☐ $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ (d) ☐ $\alpha > 2$

5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de dire que la série $\sum v_n$ converge aussi ?

(a) ☐ $u_n \sim v_n$
(c) ☐ $n^2 v_n = \mathrm{o}(u_n)$
(b) ☐ $v_n = \mathrm{o}(u_n)$
(d) ☐ $\forall n, \quad v_n \leqslant u_n$

6 A laquelle des séries suivantes ne peut-on pas appliquer le critère spécial de convergence des séries alternées ?

(a) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
(c) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$
(b) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x$
(d) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

7 Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'affirmer que $\sum u_n$ converge ?

(a) ☐ $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
(c) ☐ $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$
(b) ☐ $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0
(d) ☐ $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

8 Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

a) ☐ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$

b) ☐ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

c) ☐ $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$

d) ☐ $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^n+1}$

9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2})$ vaut

a) ☐ u_0

b) ☐ $u_0 - u_1$

c) ☐ $u_0 - 2u_1 + u_2$

d) ☐ l'hypothèse ne suffit pas pour dire que la série proposée converge.

10 Combien vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$?

a) ☐ $\frac{e}{2}$

b) ☐ $\sqrt{e}$

c) ☐ $\frac{1}{\sqrt{e}}$

d) ☐ e^2

11 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir que cette série converge ?

a) ☐ $u_n \leqslant \frac{1}{n}$

b) ☐ $u_n^2 \leqslant \frac{1}{n}$

c) ☐ $\sqrt{u_n} \leqslant \frac{1}{n}$

d) ☐ $e^{u_n} \leqslant \frac{1}{n}$

12 Pour laquelle des séries suivantes le critère de d'Alembert permet-il de montrer la convergence ?

a) ☐ $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$

b) ☐ $\sum \frac{n}{2^n}$

c) ☐ $\sum \frac{\sin n}{n}$

d) ☐ $\sum \frac{1}{n^2}$

13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, A la propriété « $\sum u_n$ converge » et B la propriété « $\sum u_n^2$ converge ». Alors

a) ☐ A $\implies$ B

b) ☐ B $\implies$ A

c) ☐ A $\iff$ B

d) ☐ il n'y a pas d'implication entre A et B.

14 Je suis une série qui converge grâce au critère spécial de convergence des séries alternées, mais je ne suis pas absolument convergente. Qui suis-je ?

a) ☐ $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

b) ☐ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

c) ☐ $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

d) ☐ $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$

15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives. Quel lien logique y a-t-il entre les propositions

A:« $\sum u_n$ converge » et B:« $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ » ?

a) ☐ A $\implies$ B

b) ☐ B $\implies$ A

c) ☐ A $\iff$ B

d) ☐ il n'y a pas d'implication entre A et B.

16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Quelle condition est suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

- (a) ☐ $\sum \sin u_n$ converge
- (b) ☐ $\sum \dfrac{u_n}{2^n}$ converge
- (c) ☐ $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge
- (d) ☐ $\sum u_{2n}$ converge