

Séries numériques

Une seule réponse exacte par question.

- 1] Combien vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$?
 (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{4}$
- 2] Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\text{sh } n}{a^n}$ est-elle convergente ?
 (a) toutes (b) $a \geq 1$ (c) $a > 1$ (d) $a > e$
- 3] Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\sum \ln(u_n)$ converge.
 Quelle série n'est pas nécessairement convergente ?
 (a) $\sum u_n$ (c) $\sum \frac{u_n}{2^n}$
 (b) $\sum e^{-nu_n}$ (d) $\sum (u_{n+1} - u_n)$
- 4] Soit $\alpha > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1$. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si, et seulement si
 (a) $\alpha > 1$ (b) $\alpha > \frac{1}{2}$ (c) $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (d) $\alpha > 2$
- 5] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de dire que la série $\sum v_n$ converge aussi ?
 (a) $u_n \sim v_n$ (c) $n^2 v_n = o(u_n)$
 (b) $v_n = o(u_n)$ (d) $\forall n, v_n \leq u_n$
- 6] A laquelle des séries suivantes ne peut-on pas appliquer le critère spécial de convergence des séries alternées ?
 (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (c) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$
 (b) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ (d) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- 7] Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet d'affirmer que $\sum u_n$ converge ?
 (a) $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (c) $u_n = O\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$
 (b) $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 (d) $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- 8] Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

- (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$
 (c) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1}$
- (b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
 (d) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n + 1}$

- 9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2})$ vaut
- (a) u_0
 (b) $u_0 - u_1$
 (c) $u_0 - 2u_1 + u_2$
- (d) l'hypothèse ne suffit pas pour dire que la série proposée converge.

- 10 Combien vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{nn}}$?
- (a) $\frac{e}{2}$
 (b) \sqrt{e}
 (c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
 (d) e^2

- 11 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir que cette série converge ?
- (a) $u_n \leq \frac{1}{n}$
 (b) $u_n^2 \leq \frac{1}{n}$
 (c) $\sqrt{u_n} \leq \frac{1}{n}$
 (d) $e^{u_n} \leq \frac{1}{n}$

- 12 Pour laquelle des séries suivantes le critère de d'Alembert permet-il de montrer la convergence ?
- (a) $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$
 (b) $\sum \frac{n}{2^n}$
 (c) $\sum \frac{\sin n}{n}$
 (d) $\sum \frac{1}{n^2}$

- 13 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, A la propriété « $\sum u_n$ converge » et B la propriété « $\sum u_n^2$ converge ». Alors
- (a) $A \implies B$
 (b) $B \implies A$
 (c) $A \iff B$
- (d) il n'y a pas d'implication entre A et B.

- 14 Je suis une série qui converge grâce au critère spécial de convergence des séries alternées, mais je ne suis pas absolument convergente. Qui suis-je ?
- (a) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
 (c) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
- (b) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$
 (d) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$

- 15 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives. Quel lien logique y a-t-il entre les propositions A: « $\sum u_n$ converge » et B: « $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ » ?
- (a) $A \implies B$
 (c) $A \iff B$
- (b) $B \implies A$
 (d) il n'y a pas d'implication entre A et B.

16 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Quelle condition est suffisante pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?

a $\sum \sin u_n$ converge

b $\sum \frac{u_n}{2^n}$ converge

c $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge

d $\sum u_{2n}$ converge

Index

Combinaison

- linéaire
 - de séries convergentes, 7

Condition

- nécessaire, 8
- suffisante, 23

Critère

- de D'Alembert, 26
- de divergence, 8
- spécial des séries alternées, 24

Fonction

- zêta, 15

Leibniz, 24

Méthode

- Comparaison série-intégrale, 13
- Utiliser les critères de comparaison, 12, 23
- Utiliser les séries de Riemann, 16

Nature

- d'une série, 3

Paradoxe

- d'Achille, 1

Reste

- d'une série, 3, 24

Somme

- d'une série, 2
- partielle, 2

Série

- absolument convergente, 22
- alternée, 24
- arithmétique, 4
- convergente, 2
- de Bertrand, 15
- de Riemann, 14
- divergente, 3
 - grossièrement, 8
- exponentielle, 6
- géométrique, 4
- harmonique, 4
 - alternée, 25
- semi-convergente, 24
- télescopique, 5
- à terme positif, 9

Terme général

- d'une série, 2, 24

Théorème

- d'encadrement, 6, 20, 21, 25
- de la limite monotone, 9

Zénon d'Élée, 1