Intégration et Applications linéaires

I Applications linéaires

1 Complétez :

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

a) $p \in \mathscr{L}(E)$

b) $p \circ p = p$ (On dit que p est idem-potent .)

c) $E_2 = \ker(p)$.

d) $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

Définition 7 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

- On appelle *projecteur* sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \longmapsto E_1$ telle que :

$$p: \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1. \end{array}$$

- On appelle *symétrie* par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

$$s: \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2. \end{array}$$

Proposition 22 (Propriétés des symétries) : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

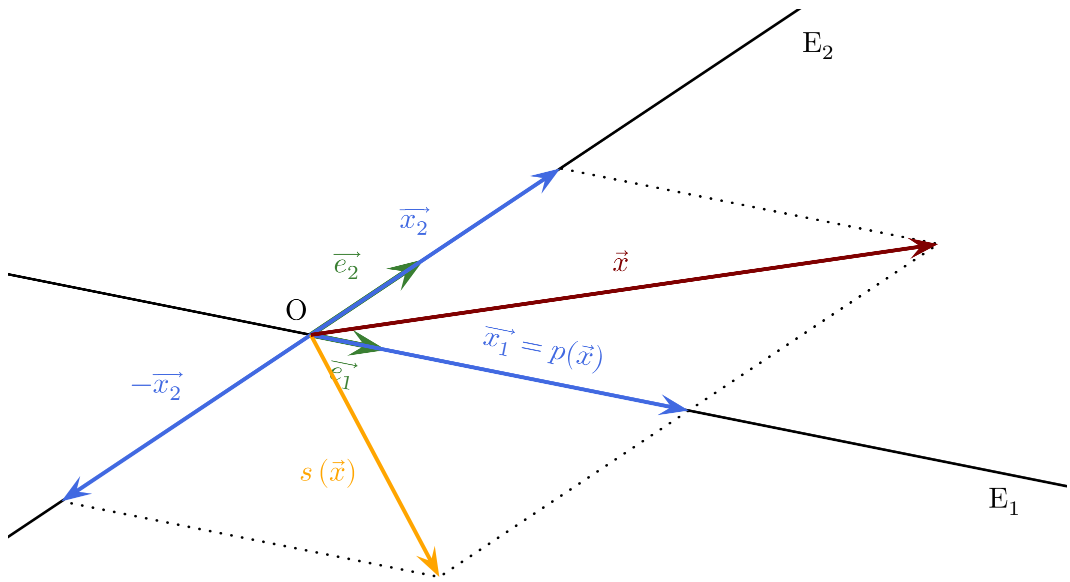
a) $s \in \mathscr{L}(E)$

b) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ *i.e.* s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.

c) $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ *i.e.* E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s .

d) $E_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ *i.e.* E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s .

2 Sur la figure ci-dessous, construire $p(\vec{x})$ et $s(\vec{x})$ où p et s sont les applications précédentes.



II Séries numériques

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

1 Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Démontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$.

Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $[2\,;+\infty[$, pour tout $t \in [k\,;k+1]$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \frac{1}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}.$$

2 Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Démontrer que $S_n - \dfrac{1}{\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$.

Sommons les inégalités membre à membre pour k variant de 2 à $n-1$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)}$$
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{n\ln(n)}$$
$$S_n - \frac{1}{\ln(2)} \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

3 En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3,

$$\ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

D'après les inégalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall\, n \geqslant 3, \qquad \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} + \frac{1}{n\ln(n)} &\leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} + \frac{1}{2\ln(2)} \\ \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{n\ln(n)} &\leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{2\ln(2)}. \end{aligned}$$

4 Démontrer que $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\ln(n)\right)$.

Pour $n \geqslant 3$, on a :

$$1 \underbrace{- \frac{\ln\left(\ln(2)\right)}{\ln\left(\ln(n)\right)} + \frac{1}{n\ln(n)\ln\left(\ln(n)\right)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\ln\left(\ln(n)\right)} \leqslant 1 \underbrace{- \frac{\ln\left(\ln(2)\right)}{\ln\left(\ln(n)\right)} + \frac{1}{2\ln(2)\ln\left(\ln(n)\right)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{S}_n}{\ln\left(\ln(n)\right)} = 1$ *i.e.* $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\ln(n)\right)$.