Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

I Applications linéaires

1 Complétez :

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

a. $p \in$ ....
b. $p \circ p =$ .. (On dit que p est ....)
c. $E_2 =$ ....
d. $E_1 =$ .... *i.e.* E_1 est l'ensemble ....

Définition 7 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels .... d'un $\mathbb{K}$-ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

- On appelle *projecteur* sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \longmapsto$ … telle que :

$$p : \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & \dots \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & \dots . \end{array}$$

- On appelle *symétrie* par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application ....

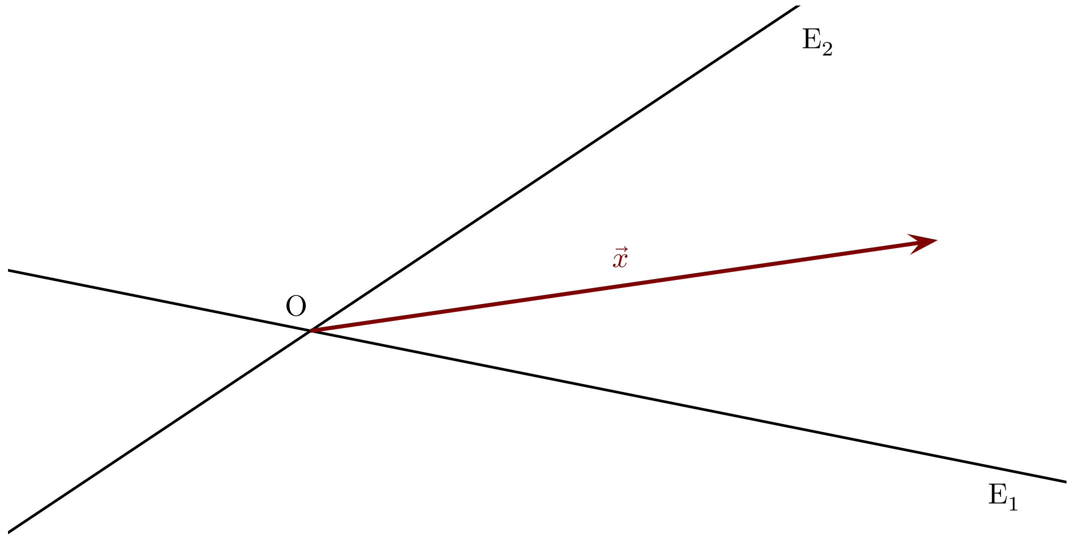
$$s : \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & .. \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & \dots\dots\dots . \end{array}$$

Proposition 22 (Propriétés des symétries) : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Alors :

a. $s \in$ ....
b. $s \circ s =$ .... *i.e.* s est .... et .... $= s$.
c. $E_1 =$ .... *i.e.* E_1 est l'ensemble ....
d. $E_2 =$ .... *i.e.* E_2 est l'ensemble ....

2 Sur la figure ci-dessous, construire $p\left(\vec{x}\right)$ et $s\left(\vec{x}\right)$ où p et s sont les applications précédentes.



II Séries numériques

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

1 Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Démontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2 Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Démontrer que $\mathrm{S}_n - \dfrac{1}{\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_2^n \dfrac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \mathrm{S}_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3,

$$\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4 Démontrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\ln(n)\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....