Intégration et Applications linéaires

I Intégration

1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donner une primitive F de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln^{\alpha}(x)}{x}$ sur $]1\,;+\infty[$.

Sur $]1\,;+\infty[$, f est continue et on a :

- Si $\alpha \neq -1$, $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{\ln^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \mathrm{C}$.
- Si $\alpha = -1$, $\mathrm{F} : x \longmapsto \ln\left(\ln(x)\right) + \mathrm{C}$.

2 À l'aide d'une intégration partie **justifiée**, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions $t \longmapsto \tan(t)$ et $t \longmapsto t$ sont de classe C^1 sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

D'où,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \Big[t\tan(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t\tan(t) + \ln|\cos(t)|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

3 En posant $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$ calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

On a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{e}^t}{2\sqrt{\mathrm{e}^t-1}} = \dfrac{u^2+1}{2u}\,\mathrm{d}u$ i.e. $\mathrm{d}t = \dfrac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$.

D'où,

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^1 \mathrm{d}u - 2\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\Big[u - \arctan(u)\Big]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

4 À l'aide d'une somme de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$.

En posant $f_1 : x \longmapsto x$ qui est continue sur $[0\,;1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_1\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

II Applications linéaires

5 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

Monter que f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.

$(\Rightarrow)$: Supposons que f soit injective.

Considérons une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{F}$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$.

Par linéarité, on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0$.

Par injectivité, on déduit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.

Par indépendance linéaire de la base $\mathcal{B}$, on en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$: $\mathcal{F}$ est bien libre.

$(\Leftarrow)$: Supposons que $\mathcal{F}$ soit libre.

Montrons que f est injective en déterminant son noyau : soit $x \in \ker(f)$.

Décomposons x sur la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

On a $0 = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

Or, la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ étant libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Par suite, $x = 0$ i.e. $\ker(f) = \{0\}$ et f est bien injective.

6 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \phi_{\mathcal{F}} : & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i. \end{array}$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective.

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est injective.

(a) $\operatorname{Im}\phi_{\mathcal{F}} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\} = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \mathcal{F} \text{ est génératrice } &\iff \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{E} \\ &\iff \operatorname{Im}\phi_{\mathcal{F}} = \mathrm{E} \\ &\iff \phi_{\mathcal{F}} \text{ est surjective} \end{aligned}$$

(b) $\ker\phi_{\mathcal{F}} = \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \right\}$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \mathcal{F} \text{ est libre } &\iff \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \right\} = \{(0, \cdots, 0)\} \\ &\iff \ker\phi_{\mathcal{F}} = \{(0, \cdots, 0)\} \\ &\iff \phi_{\mathcal{F}} \text{ est injective} \end{aligned}$$