Nom : ..... **Prénom :** .....

Intégration et Applications linéaires

I Intégration

1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donner une primitive F de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln^{\alpha}(x)}{x}$ sur $]1\,;+\infty[$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 À l'aide d'une intégration partie **justifiée**, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 En posant $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$ calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

4 À l'aide d'une somme de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$.

II Applications linéaires

5 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

Monter que f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.

6 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \phi_{\mathcal{F}} : & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i. \end{array}$$

a Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective.

b Montrer que $\mathcal{F}$ est libre $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est injective.