Intégration et Applications linéaires

1 Intégration

- Définition d'une subdivision et d'une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.
- Théorème d'approximation de Weierstrass si f est continue sur $[a;b]$ alors on peut l'approcher à ε près par une fonction φ en escalier.
- Propriétés : linéarité, positivité/croissance, séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive), relation de Chasles.
- Inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
- Théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale de a à x de f est l'unique primitive de f... Cas de l'intégrale de f' lorsque f est $\mathscr{C}^1$.
- Sommes de Riemann et convergence des sommes.
- Inégalité de Taylor-Lagrange.

2 Applications linéaires

- Définition par l'image d'une combinaison linéaire de deux vecteurs. Extension aux combinaisons de n vecteurs, cas particulier de la somme et de la multiplication externe.
- Définition de l'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, vocabulaire : endomorphisme, forme linéaire, automorphisme, isomorphisme.
- Image de 0, restriction à un sous-espace vectoriel, somme et composition d'applications linéaires, notation f^n.
- $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un espace vectoriel. La composition d'applications linéaires est une application linaire. L'inverse d'une application linéaire est une application linéaire. Cas d'endomorphismes commutant (formule de Leibniz et de Bernoulli).
- Noyau et Image. Définition. Ce sont des sous-espaces vectoriels. Généralisation l'image directe et l'image réciproque de sous-espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels.
- Projecteur et symétrie. Définition et caractérisation par $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Détermination des espaces caractéristiques.
- Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image.
- Image d'un sous-espace engendré et écriture de $\mathrm{Im}(f)$ à l'aide une famille génératrice de E.
- L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre et l'image d'une famille génératrice par une application surjective est génératrice.
- Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire à l'aide de l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires.
- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Lorsque f est injective/surjective/bijective comparaison des dimensions de E et F.
- Tous les espaces isomorphes sont de même dimension et tous les espaces de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$.
- Définition du rang. Théorème du rang. Lorsque $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$, f est injective si et seulement f est surjective si et seulement si f est bijective.
- Ensemble des solutions d'une équation $f(x) = b$ où $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $b \in \mathrm{F}$.

Questions de cours possibles [1] :

1. Sommes de Riemann
2. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
3. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.
4. Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels
5. Caractérisation des projecteurs.
6. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.