Fichiers Integration-Riemann a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Correction : Soit $u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$. En posant $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Correction : Soit

$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.$$

En posant $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$.

Correction : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1}\,dx = \left[\frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

Exercice 4 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Correction : Soit
$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$
En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :
$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
La somme de Riemann u_n convergeant vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n}$.

Correction : Pour $n \geqslant 1$,
$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$
où $f(x) = x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(\pi x)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

Exercice 6 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$.

Correction : Encore une fois, ce n'est pas une somme de Riemann. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$
En sommant ces inégalités, il vient
$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$
et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),
$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$
et finalement, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+1}{2n}$. Or, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\dfrac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\dfrac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 7 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Correction : Tout d'abord

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x\in[0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.

Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $1\leqslant k\leqslant n-2$, on a $\displaystyle\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\leqslant\int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, et pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, $\displaystyle\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\geqslant\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin(1-\frac{1}{n}),$$

et

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\\&=\arcsin(1-\frac{1}{n})-\arcsin\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}.\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 8 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

Correction : $\displaystyle u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2(k+n)+1}=\frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2+x}\,dx=\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)=\ln 2$.

Exercice 9 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.

Exercice 10 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)}+\sqrt{2(n-2)}+\cdots+\sqrt{(n-1)1}\right)$.

Correction : $\ln k$.

Exercice 11 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : $p_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

$$s_n=\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{4}{e}}$$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

Correction : Ce n'est pas une somme de Riemann.

On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\,\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\,\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+1}{2n}$.

Or, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\dfrac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\dfrac{3}{2}$.

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} = \frac{3}{2}$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Posons $p_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Alors, $\displaystyle s_n = \ln p_n = \frac{1}{n}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{4}{\mathrm{e}}$.

Exercice 3 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

Correction : Posons $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$.

D'où, $\displaystyle\frac{1}{n}u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt[3]{4}-1}{2}$, et $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{4}-1}{2}n$.

Exercice 4 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $\mathrm{I} = \int_0^1 g(x)dx$.

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2[x - \arctan x]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $\mathrm{I} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Exercice 5 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)\right)^{1/n}$, $(a > 0$ donné$)$.

Correction : On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k) - \ln k)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1 + \frac{a}{k}).$$

La suite de nombres a, $\frac{a}{2}$,..., $\frac{a}{n}$ « est une subdivision (à pas non constant) de $[0,a]$ » mais malheureusement son pas $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans le même type de problèmes.

Rappel. (exo classique) Soit v une suite strictement positive telle que la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tend vers un réel positif ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ.

Posons $v_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ puis $u_n = \sqrt[n]{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \to 1,$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 6 : Trouver $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

Correction : $\frac{\pi}{8}$.

Exercice 7 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$.

Correction : $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt[n]{e^k}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \dfrac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x = 1-\dfrac{2}{e}$.

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt[n]{e^k}} = 1-\dfrac{2}{e}}$.

Exercice 8 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

Correction : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}} = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$.

Donc $\dfrac{1}{n}u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{2}$, et $\boxed{u_n \sim \dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{2}n}$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x)=\ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $\mathrm{I} = \int_0^1 g(x)dx$.

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1-\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\left[x-\arctan x\right]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $\mathrm{I} = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Exercice 2 : En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Correction : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = n\sqrt{n} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

Or $f : t \to \sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. D'où $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

Donc $S_n \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 3 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$.

Correction : Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\sqrt{k} - 1 \leqslant E(\sqrt{k}) \leqslant \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de Riemann $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ tend vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

Exercice 4 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$.

Correction : Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ si $x > 0$ et 0 si $x = 0$. f est continue sur $[0,1]$ (théorèmes de croissances comparées). Donc, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Pour $x \in [0,1]$, posons $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, F l'est et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(0) = \lim_{x\to 0,\,x>0} F(x) = \lim_{x\to 0,\,x>0}\left[e^{-1/t}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0,\,x>0}(e^{-1} - e^{-1/x}) = \frac{1}{e}.$$

Donc, u_n tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Trouver $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.

Correction : $\frac{1}{3}\int_{t=0}^{3\pi}\frac{dt}{2+\cos t} = \int_{t=0}^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Exercice 6 :

1. Montrer que : $\forall\ x \geqslant 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Trouver $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Correction :

1.
2. $\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 7 : Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\ dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction : Supposons f de classe C^2 sur $[0,1]$.

Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n = \int_0^1 f(t)\ dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\mathrm{F}'\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

f est de classe C^2 sur le segment $[0,1]$.

Par suite, $\mathrm{F}^{(3)} = f''$ est définie et bornée sur ce segment. En notant M_2 la borne supérieure de $|f''|$ sur $[0,1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée à F sur le segment $[0,1]$ fournit

$$\left|\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\mathrm{F}'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\mathrm{F}''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{(1/n)^3\,\mathrm{M}_2}{6},$$

et donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\mathrm{F}'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\mathrm{F}''\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\mathrm{F}'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\mathrm{F}''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1/n)^3\,\mathrm{M}_2}{6} = \frac{\mathrm{M}_2}{6n^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\mathrm{F}'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\mathrm{F}''\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ou encore

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\mathrm{F}'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\mathrm{F}''\left(\frac{k}{n}\right)\right] = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ou enfin,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}\mathrm{F}''\left(\frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}\mathrm{F}''\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or, la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$. Par suite, la somme de Riemann $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\ dt = f(1) - f(0)$ et donc

$$\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}\left(f(1) - f(0) + o(1)\right) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(t)\ dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$