Fichiers AlgLin-ProjSym A, B et C

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : On considère p et q deux projecteurs tels que $p\circ q=0$. On pose $r=p+q-q\circ p$. Montrer que r est un projecteur et que $\ker r=\ker p\cap\ker q$.

Correction :

- r est linéaire.
- $r\circ r=(p+q-q\circ p)\circ(p+q-q\circ p)=p^2+p\circ q-p\circ(q\circ p)+q\circ p+q^2-q\circ(q\circ p)-(q\circ p)\circ p-(q\circ p)\circ q+(q\circ p)\circ(q\circ p)$

  Compte tenu de $p\circ q=0$, on obtient $r\circ r==p+q\circ p+q-q\circ p-q\circ p=r$

Par conséquent, r est un projecteur.

Montrons que $\ker r=\ker p\cap\ker q$.

$\supset$ **:** immédiat

$\subset$ **:** Soit $x\in\ker r$. On a donc $p(x)+q(x)=q\circ p(x)$.(1)

En composant par p et en tenant compte de $p\circ q=0$, on obtient $p(x)=0$.

Dans (1), il reste $q(x)=0$. Donc $x\in\ker p\cap\ker q$. QED

Exercice 2 : Soit p et q deux projecteurs de E.

Montrer que : $p+q$ est un projecteur $\iff$ $p\circ q=q\circ p=0$.

Correction :

$\Leftarrow$
- p et q étant des projecteurs, on a $p+q\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
- $(p+q)\circ(p+q)=p\circ(p+q)+q\circ(p+q)=p^2+p\circ q+q\circ p+q^2=p+q$ par hypothèse.

Donc $p+q$ est un projecteur.

$\Rightarrow$ Supposons que $p+q$ soit un projecteur. On a $(p+q)^2=p+q$ donc $p\circ q+q\circ p=0$ (1)

En composant, on a $\begin{cases}p\circ q+p\circ q\circ p=0\\ q\circ p\circ q+q\circ p=0\end{cases}$, et par soustraction, $p\circ q=q\circ p$ (2).

D'après (1) et (2), on a bien $p\circ q=q\circ p=0$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p,q deux projecteurs de E tels que $p\circ q=q\circ p$.

Montrer que $p\circ q$ est un projecteur de E.

Déterminer son image et son noyau.

Correction :

- $(p\circ q)\circ(p\circ q)=p\circ(q\circ p)\circ q=p\circ(p\circ q)\circ q=p\circ q$.

  $p\circ q$ étant linéaire, il s'agit bien d'un projecteur.
- On a $\begin{cases}\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset\mathrm{Im}\,p\\ \mathrm{Im}\,(q\circ p)\subset\mathrm{Im}\,q\end{cases}$ donc $\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$.

  Réciproquement, soit $x\in\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$. Alors $p(x)=x$ et $q(x)=x$. De ce fait, $p\circ q(x)=x$ et $x\in\mathrm{Im}\,(p\circ q)$.

  Bilan : $\boxed{\mathrm{Im}\,(p\circ q)=\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q}$.

– On a $\begin{cases} \ker p \subset \ker(q \circ p) \\ \ker q \subset \ker(p \circ q) \end{cases}$ donc $\ker p + \ker q \subset \ker(p \circ q)$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(q \circ p)$. On a $x = \underbrace{p(x)}_{\in \ker q} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p}$. On a donc $x \in \ker p + \ker q$.

Bilan : $\boxed{\ker(p \circ q) = \ker p + \ker q}$.

Exercice 4 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et p un projecteur de E.

Montrer que u et p commutent $\iff$ $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par u.

Correction :

$\Leftarrow$ On a $\mathrm{E} = \ker \oplus \operatorname{Im} p$.

Soit $x \in \mathrm{E}$. On pose $x = x' + x''$ avec $x' \in \ker p$ et $x'' \in \operatorname{Im} p$.

Par hypothèse, $u(x') \in \ker p$ et $u(x'') \in \operatorname{Im} p$.

Or $u(x) = u(x') + u(x'')$ d'où

$$\begin{aligned} p \circ u(x) &= u(x') + u(x'') \\ &= 0 + p(u(x'')) \quad \text{car } u(x') \in \ker p \\ &= u(x'') \quad \text{car } u(x'') \in \operatorname{Im} p \\ &= u(p(x)) \quad \text{par définition de } p \end{aligned}$$

Donc $p \circ u = u \circ p$.

$\Rightarrow$ – Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $p(a) = x$.

On a $u(x) = u(p(a)) = u \circ p(a) = p \circ u(a) \in \operatorname{Im} p$.

– Soit $x \in \ker p$. On a donc $p(x) = 0_{\mathrm{E}}$.

On a $p(u(x)) = p \circ u(x) = u \circ p(x) = u(p(x)) = u(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$ car u est linéaire. Donc $u(x) \in \ker p$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur $\iff$ $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Comparer $\ker(p+q)$ et $\ker p \cap \ker q$ lorsque $p + q$ est un projecteur.
3. Comparer $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ lorsque $p + q$ est un projecteur.

Correction :

1. $\Leftarrow$ – p et q étant des projecteurs, on a $p + q \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
   – $(p+q) \circ (p+q) = p \circ (p+q) + q \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$ par hypothèse.

   Donc $p + q$ est un projecteur.

   $\Rightarrow$ Supposons que $p + q$ soit un projecteur. On a $(p+q)^2 = p + q$ donc $p \circ q + q \circ p = 0$ (1)

   En composant, on a $\begin{cases} p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \\ q \circ p \circ q + q \circ p = 0 \end{cases}$, et par soustraction, $p \circ q = q \circ p$ (2).

   D'après (1) et (2), on a bien $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Montrons que $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$ lorsque $p + q$ est un projecteur.

$\supset$ immédiat
$\subset$ Si $u \in \ker(p+q)$, alors $p(u)+q(u)=0$. En composant par p, on obtient $p(u)+p\circ q(u)=0$.

Or on a vu que $p\circ q=0$. Donc $p(u)=0$ et $u\in\ker p$. De même, $u\in\ker q$. Donc $u\in\ker p\cap\ker q$.

3 Montrons que $\mathrm{Im}\,(p+q)=\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$ lorsque $p+q$ est un projecteur.

$\subset$ immédiat
$\supset$ Soit $u\in\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$. On peut donc écrire $u=p(a)+q(b)$.

En composant par p, sachant que $p\circ q=0$, on obtient $p(u)=p(a)$.

De même, $q(u)=q(a)$.

Finalement, $u=p(u)+q(u)=(p+q)(u)\in\mathrm{Im}\,(p+q)$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p,q deux projecteurs de E.

Caractériser, à l'aide des noyaux et des images les relations suivantes :

1 $p\circ q=p$;

2 $q\circ p=p$.

Correction :

1 Montrons que $\boxed{p\circ q=p \iff \ker q\subset\ker p.}$

$\Longrightarrow$ On a toujours $\ker q\subset\ker(p\circ q)$. D'où ici $\ker q\subset\ker p$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\ker q\subset\ker p$.

Soit $u\in\mathrm{E}$. $p\circ q(u)=p(q(u))=p(u+q(u)-u)=p(u)+p(\underbrace{q(u)-u}_{\in\ker q})=p(u)$

2 Montrons que $\boxed{q\circ p=p \iff \mathrm{Im}\,p\subset\mathrm{Im}\,q.}$

$\Longrightarrow$ On a toujours $\mathrm{Im}\,(q\circ p)\subset\mathrm{Im}\,q$. D'où ici $\mathrm{Im}\,p\subset\mathrm{Im}\,q$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}\,p\subset\mathrm{Im}\,q$.

Soit $u\in\mathrm{E}$. $q\circ p(u)=q(\underbrace{p(u)}_{\in\mathrm{Im}\,p})=q(\underbrace{p(u)}_{\in\mathrm{Im}\,q})=p(u)$

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p,q deux projecteurs de E vérifiant $p\circ q=q\circ p$.

Montrer que $p\circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau en fonction des images et des noyaux de p et q.

Correction :

- $(p\circ q)\circ(p\circ q)=p\circ q$ donc $p\circ q$ est un projecteur.
- $\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Im}\,(p\circ q)=\mathrm{Im}\,(q\circ p)\subset\mathrm{Im}\,q$ donc $\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$.

  Soit $x\in\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$. Alors $x=p(x)=q(x)$.

  Par conséquent, $p\circ q(x)=p(q(x))=p(x)=x$. Donc $x\in\mathrm{Im}\,(p\circ q)$, et $\boxed{\mathrm{Im}\,(p\circ q)=\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q}$.
- $\ker q\subset\ker(p\circ q)$ et $\ker p\subset\ker(q\circ p)=\ker(p\circ q)$ donc $\ker p+\ker q\subset\ker(p\circ q)$. Réciproquement, soit $x\in\ker(p\circ q)$. Alors $p(q(x))=0$.

  On a $x=q(x)+(x-q(x))$, avec par hypothèse, $q(x)\in\ker p$ et $x-q(x)\in\ker q$. Donc $x\in\ker p+\ker q$ et finalement, $\boxed{\ker(p\circ q)=\ker p+\ker q}$.

Exercice 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $p,q\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1 Montrer que p et q sont deux projecteurs de même noyau $\iff p\circ q = p$ et $q\circ p = q$.

2 Déterminer une CNS pour que p et q soient des projecteurs de même image.

Correction :

1 $\Rightarrow$ Supposons que p et q soient des projecteurs tels que $\ker p = \ker q$.

Soit $x\in \mathrm{E}$. $x - p(x) \in \ker p = \ker q$ alors $q(x) - q\circ p(x) =$. D'où $q\circ p = q$. Même démonstration pour $p\circ q = p$.

$\Leftarrow$ Supposons que $p\circ q = p$ (1) et $q\circ p = q$ (2).

D'après (2), on a $p\circ q\circ p = p\circ q$. Donc $(p\circ q)\circ p = p\circ q$, et en utilisant (1), $p\circ p = p$: p est bien un projecteur. Idem pour q.

Soit maintenant $x\in\ker p$. On a $q(x) = q\circ p(x) = q(0) = 0$ donc $x\in\ker q$. Idem dans l'autre sens, donc $\ker p = \ker q$.

2 Montrons que p et q sont deux projecteurs de même image $\iff p\circ q = p$ et $q\circ p = q$.

$\Rightarrow$ Supposons que p et q soient des projecteurs tels que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

Soit $x\in \mathrm{E}$. $q(x)\in \operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p$ alors $p(q(x)) = q(x)$. D'où $p\circ q = q$. Même démonstration pour $q\circ p = p$.

$\Leftarrow$ Supposons que $p\circ q = q$ (1) et $q\circ p = p$ (2).

D'après (1), on a $q\circ p\circ q = q\circ q$. Donc $(q\circ p)\circ q = q\circ q$ et en utilisant (1), $p\circ q = q^2$ et à nouveau d'après (1), $q = q^2$: q est bien un projecteur. Idem pour p.

On a $\operatorname{Im}(p\circ q)\subset \operatorname{Im} p$ donc d'après (1), $\operatorname{Im} q\subset\operatorname{Im} p$. Et par symétrie, $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p$.

NB : $p\circ q = q \iff p\circ q - q = 0 \iff (p-\mathrm{Id})\circ q = 0 \iff \operatorname{Im} q\subset \ker(p-\mathrm{Id}) \iff \operatorname{Im} q\subset\operatorname{Im} p$

Exercice 5 : Soit p et q deux projecteurs de E.

Montrer que $p+q$ est un projecteur $\iff p\circ q = q\circ p = 0$.

Correction :

$\Leftarrow$:

- p et q nt des projecteurs, on a $p+q\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- $(p+q)\circ(p+q) = p\circ(p+q) + q\circ(p+q) = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q$ par hypoth .

Donc $p+q$ est un projecteur.

$\Rightarrow$: Supposons que $p+q$ soit un projecteur. On a $(p+q)^2 = p+q$ donc $p\circ q + q\circ p = 0$ (1)

En composant par p auche et q roite, on a $\begin{cases} p\circ q + p\circ q\circ p = 0\\ q\circ p\circ q + q\circ p = 0\end{cases}$, et par soustraction, $p\circ q = q\circ p$ (2).

D'apr (1) et (2), on a bien $p\circ q = q\circ p = 0$.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p\circ q = q\circ p$.

Montrer que $p\circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau en fonction des images et des noyaux de p et q.

Correction :

- $(p\circ q)\circ(p\circ q) = p\circ q$ donc $p\circ q$ est un projecteur.

- $\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset \mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p\circ q)=\mathrm{Im}\,(q\circ p)\subset \mathrm{Im}\,(q)$ donc $\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset \mathrm{Im}\,(p)\cap \mathrm{Im}\,(q)$.

  Soit $x\in \mathrm{Im}\,(p)\cap \mathrm{Im}\,(q)$. Alors $x=p(x)=q(x)$.

  Par conséquent, $p\circ q(x)=p(q(x))=p(x)=x$.

  Donc $x\in \mathrm{Im}\,(p\circ q)$, et
$$\mathrm{Im}\,(p\circ q)=\mathrm{Im}\,(p)\cap \mathrm{Im}\,(q)\,.$$

- $\ker\,(q)\subset \ker\,(p\circ q)$ et $\ker\,(p)\subset \ker\,(q\circ p)=\ker\,(p\circ q)$ donc $\ker\,(p)+\ker\,(q)\subset \ker\,(p\circ q)$. Réciproquement, soit $x\in \ker\,(p\circ q)$. Alors $p(q(x))=0$.

  On a $x=q(x)+(x-q(x))$, avec par hypothèse, $q(x)\in \ker\,(p)$ et $x-q(x)\in \ker\,(q)$.

  Donc $x\in \ker\,(p)+\ker\,(q)$ et finalement,
$$\ker\,(p\circ q)=\ker\,(p)+\ker\,(q)\,.$$

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $p,q\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que p et q sont deux projecteurs de même noyau $\iff$ $p\circ q=p$ et $q\circ p=q$.
2. Déterminer une CNS pour que p et q soient des projecteurs de même image.

Correction :

1. $\Rightarrow$: Supposons que p et q soient des projecteurs tels que $\ker\,(p)=\ker\,(q)$.

   Soit $x\in\mathrm{E}$. $x-p(x)\in\ker\,(p)=\ker\,(q)$ alors $q(x)-q\circ p(x)=$.

   D'où $q\circ p=q$. Même démonstration pour $p\circ q=p$.

   $\Leftarrow$: Supposons que $p\circ q=p$ (1) et $q\circ p=q$ (2).

   D'après (2), on a $p\circ q\circ p=p\circ q$.

   Donc $(p\circ q)\circ p=p\circ q$, et en utilisant (1), $p\circ p=p$: p est bien un projecteur.

   Idem pour q.

   Soit maintenant $x\in\ker\,(p)$.

   On a $q(x)=q\circ p(x)=q(0)=0$ donc $x\in\ker\,(q)$.

   Idem dans l'autre sens, donc $\ker\,(p)=\ker\,(q)$.
2. Montrons que p et q sont deux projecteurs de même image $\iff$ $p\circ q=p$ et $q\circ p=q$.

   $\Rightarrow$: Supposons que p et q soient des projecteurs tels que $\mathrm{Im}\,(p)=\mathrm{Im}\,(q)$.

   Soit $x\in\mathrm{E}$. $q(x)\in\mathrm{Im}\,q=\mathrm{Im}\,(p)$ alors $p(q(x))=q(x)$.

   D'où $p\circ q=q$.

   Même démonstration pour $q\circ p=p$.

   $\Leftarrow$: Supposons que $p\circ q=q$ (1) et $q\circ p=p$ (2).

   D'après (1), on a $q\circ p\circ q=q\circ q$.

   Donc $(q\circ p)\circ q=q\circ q$ et en utilisant (1), $p\circ q=q^2$ et à nouveau d'après (1), $q=q^2$: q est bien un projecteur.

   Idem pour p.

   On a $\mathrm{Im}\,(p\circ q)\subset\mathrm{Im}\,(p)$ donc d'après (1), $\mathrm{Im}\,(q)\subset\mathrm{Im}\,(p)$.

   Et par symétrie, $\mathrm{Im}\,(q)=\mathrm{Im}\,(p)$.

Remarque : $p\circ q = q \iff p\circ q - q = 0 \iff (p-\mathrm{Id})\circ q = 0 \iff \mathrm{Im}\, q \subset \ker(p-\mathrm{Id}) \iff \mathrm{Im}\,(q) \subset \mathrm{Im}\,(p)$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $[\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}]$ et $[\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{E} = \ker f + \mathrm{Im} f]$ (où $f^2 = f\circ f$).
2. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
   Montrer que
   $$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow \mathrm{Id} - p \text{ projecteur}]$$
   puis que
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \mathrm{Im} p = \ker(\mathrm{Id}-p) \text{ et } \ker p = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-p) \text{ et } \mathrm{E} = \ker p \oplus \mathrm{Im} p].$$
3. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\ker p = \ker q \Leftrightarrow p = p\circ q \text{ et } q = q\circ p]$.
4. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p\circ q + q\circ p = 0$, montrer que $p\circ q = q\circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\ker(p+q)$ en fonction de $\ker p$, $\ker q$, $\mathrm{Im} p$ et $\mathrm{Im} q$.

Correction :

1. On a toujours $\ker f \subset \ker f^2$.

   En effet, si x est un vecteur de $\ker f$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ (car f est linéaire) et x est dans $\ker f^2$.
   Montrons alors que : $[\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}]$. Supposons que $\ker f = \ker f^2$ et montrons que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

   Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$. Alors, d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais alors, $f^2(y) = f(x) = 0$ et $y \in \ker f^2 = \ker f$. Donc, $x = f(y) = 0$. On a montré que $\ker f = \ker f^2 \Rightarrow \ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
   Supposons que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ et montrons que $\ker f = \ker f^2$.

   Soit $x \in \ker f^2$. Alors $f(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in \ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$. Donc, $f(x) = 0$ et x est dans $\ker f$. On a ainsi montré que $\ker f^2 \subset \ker f$ et, puisque l'on a toujours $\ker f \subset \ker f^2$, on a finalement $\ker f = \ker f^2$. On a montré que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\} \Rightarrow \ker f = \ker f^2$.

   On a toujours $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$. En effet : $y \in \mathrm{Im} f^2 \Rightarrow \exists x \in \mathrm{E}/\ y = f^2(x) = f(f(x)) \Rightarrow y \in \mathrm{Im} f$.

   Supposons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ et montrons que $\ker f + \mathrm{Im} f = \mathrm{E}$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Puisque $f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$, il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = f^2(t)$. Soit alors $z = f(t)$ et $y = x - f(t)$. On a bien $x = y + z$ et $z \in \mathrm{Im} f$. De plus, $f(y) = f(x) - f(f(t)) = 0$ et y est bien élément de $\ker f$. On a donc montré que $\mathrm{E} = \ker f + \mathrm{Im} f$.
   Supposons que $\ker f + \mathrm{Im} f = \mathrm{E}$ et montrons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

   Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $(y, z) \in \ker f \times \mathrm{Im} f$ tel que $x = y + z$. Mais alors $f(x) = f(z) \in \mathrm{Im} f^2$ car z est dans $\mathrm{Im} f$. Ainsi, pour tout x de E, $f(x)$ est dans $\mathrm{Im} f^2$ ce qui montre que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ et comme on a toujours $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$, on a montré que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. $\mathrm{Id} - p$ projecteur $\Leftrightarrow (\mathrm{Id}-p)^2 = \mathrm{Id} - p \Leftrightarrow \mathrm{Id} - 2p + p^2 = \mathrm{Id} - p \Leftrightarrow p^2 = p \Leftrightarrow p$ projecteur.

Soit x un élément de E. $x \in \mathcal{I}\mathrm{m}p \Rightarrow \exists y \in \mathrm{E}/\ x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. Donc, $\forall\, x \in \mathrm{E},\ (x \in \mathcal{I}\mathrm{m}p \Rightarrow p(x) = x)$.

Réciproquement, si $p(x) = x$ alors bien sûr, x est dans $\mathcal{I}\mathrm{m}p$.

Finalement, pour tout vecteur x de E, $x \in \mathcal{I}\mathrm{m}p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(\mathrm{Id} - p)$. On a montré que $\mathcal{I}\mathrm{m}p = \ker(\mathrm{Id} - p)$.

En appliquant ce qui précède à $\mathrm{Id}-p$ qui est également un projecteur, on obtient $\mathcal{I}\mathrm{m}(\mathrm{Id}-p) = \ker(\mathrm{Id}-(\mathrm{Id}-p)) = \ker p$.

Enfin, puisque $p^2 = p$ et donc en particulier que $\ker p = \ker p^2$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}p = \mathcal{I}\mathrm{m}p^2$, le 1) montre que $\mathrm{E} = \ker p \oplus \mathcal{I}\mathrm{m}p$.

3

$$\begin{aligned} p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p &\Leftrightarrow p \circ (\mathrm{Id} - q) = 0 \text{ et } q \circ (\mathrm{Id} - p) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}\mathrm{m}(\mathrm{Id} - q) \subset \ker p \text{ et } \mathcal{I}\mathrm{m}(\mathrm{Id} - p) \subset \ker q \\ &\Leftrightarrow \ker q \subset \ker p \text{ et } \ker p \subset \ker q \text{ (d'après 2))} \\ &\Leftrightarrow \ker p = \ker q. \end{aligned}$$

4 $p \circ q + q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = (p \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p)$ et de même, $q \circ p = q \circ p \circ p = -p \circ q \circ p$. En particulier, $p \circ q = q \circ p$ et donc $0 = p \circ q + q \circ p = 2p \circ q = 2q \circ p$ puis $p \circ q = q \circ p = 0$.

La réciproque est immédiate.

$p+q$ projecteur $\Leftrightarrow (p+q)^2 = p+q \Leftrightarrow p^2 + pq + qp + q^2 = p + q \Leftrightarrow pq + qp = 0 \Leftrightarrow pq = qp = 0$ (d'après ci-dessus). Ensuite, $\mathcal{I}\mathrm{m}(p+q) = \{p(x) + q(x),\ x \in \mathrm{E}\} \subset \{p(x) + q(y),\ (x, y) \in \mathrm{E}^2\} = \mathcal{I}\mathrm{m}p + \mathcal{I}\mathrm{m}q$.

Réciproquement, soit z un élément de $\mathcal{I}\mathrm{m}p + \mathcal{I}\mathrm{m}q$. Il existe deux vecteurs x et y de E tels que $z = p(x) + q(y)$. Mais alors, $p(z) = p^2(x) + pq(y) = p(x)$ et $q(z) = qp(x) + q^2(y) = q(y)$ et donc

$$z = p(x) + p(y) = p(z) + q(z) = (p+q)(z) \in \mathcal{I}\mathrm{m}(p+q).$$

Donc, $\mathcal{I}\mathrm{m}p + \mathcal{I}\mathrm{m}q \subset \mathcal{I}\mathrm{m}(p+q)$ et finalement, $\mathcal{I}\mathrm{m}(p+q) = \mathcal{I}\mathrm{m}p + \mathcal{I}\mathrm{m}q$.

$\ker p \cap \ker q = \{x \in \mathrm{E}/\ p(x) = q(x) = 0\} \subset \{x \in \mathrm{E}/\ p(x) + q(x) = 0\} = \ker(p+q)$.

Réciproquement, si x est élément de $\ker(p+q)$ alors $p(x)+q(x) = 0$. Par suite, $p(x) = p^2(x)+pq(x) = p(p(x)+q(x)) = p($ et $q(x) = qp(x) + q^2(x) = q(0) = 0$. Donc, $p(x) = q(x) = 0$ et $x \in \ker p \cap \ker q$. Finalement, $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 2 : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathscr{C}$-espace vectoriel E.

Montrer que $(p + q \text{ projecteur}) \Leftrightarrow (p \circ q = q \circ p = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(p) \subset \ker(q) \text{ et } \mathrm{Im}(q) \subset \ker(p))$.

Dans le cas où $p + q$ est un projecteur, déterminer $\ker(p + q)$ et $\mathrm{Im}(p + q)$.

Correction : $\Rightarrow$/ Si $p+q$ est un projecteur alors l'égalité $(p+q)^2 = p+q$ fournit $pq+qp = 0$. En composant par p à droite ou à gauche , on obtient $pqp + qp = 0 = pq + pqp$ et donc $pq = qp$.

Cette égalité jointe à l'égalité $pq + qp = 0$ fournit $pq = qp = 0$.

$\Leftarrow$/ Si $pq = qp = 0$, alors $(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$ et $p+q$ est un projecteur.

Pour tous projecteurs p et q, $(p + q$ projecteur$\Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}\mathrm{m}q \subset \ker p$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}p \subset \ker q)$.

Dorénavant, $p+q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $pq = qp = 0$.

On a $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$. Inversement, pour $x \in \mathrm{E}$,

$$x \in \ker(p+q) \Rightarrow (p+q)(x) = 0 \Rightarrow p(p(x)+q(x)) = 0 \Rightarrow p(x) = 0,$$

et de même $q(x) = 0$. Ainsi, $\ker(p+q) \subset \ker p \cap \ker q$ et donc $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

On a $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$. Inversement, pour $x \in \mathrm{E}$,

$$x \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q \Rightarrow \exists (x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2 / \ x = p(x_1) + q(x_2).$$

Mais alors, $(p+q)(x) = p^2(x_1) + pq(x_1) + qp(x_2) + q^2(x_2) = p(x_1) + q(x_2) = x$ et donc $x \in \mathrm{Im}(p+q)$. Ainsi, $\mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et donc $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$. En résumé, si p et q sont deux projecteurs tels que $p+q$ soit un projecteur, alors

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q \text{ et } \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q.$$

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel. Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(\mathrm{E})$ de cardinal n. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G et p un projecteur d'image F. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1}$ est un projecteur d'image F.

Correction : Soit $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1}$.

$$q^2 = \frac{1}{n} \sum_{(g,h) \in \mathrm{G}^2} h \circ p \circ h^{-1} \circ g \circ p \circ g^{-1}.$$

Mais si g et h sont deux éléments de G et x est un vecteur quelconque de E, $p(g^{-1}(x))$ est dans F et donc par hypothèse $h^{-1} \circ g \circ p \circ g^{-1}(x)$ est encore dans F (h^{-1} est dans G puisque G est un groupe). On en déduit que

$$h \circ p \circ h^{-1} \circ g \circ p \circ g^{-1} = h \circ h^{-1} \circ g \circ p \circ g^{-1} = g \circ p \circ g^{-1}.$$

Mais alors

$$q^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{(g,h) \in \mathrm{G}^2} g \circ p \circ g^{-1} = \frac{1}{n^2} \times n \sum_{g \in \mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1} = q$$

et q est un projecteur.

Montrons que $\mathrm{F} \subset \mathrm{Im}q$. Soit x un élément de F. Pour chaque $g \in \mathrm{G}$, $g^{-1}(x)$ est encore dans F et donc $p(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$ puis $g(p(g^{-1}(x))) = x$. Mais alors

$$q(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathrm{G}} x = x,$$

ou encore x est dans $\mathrm{Im}q$. On a montré que $\mathrm{F} \subset \mathrm{Im}q$.

Montrons que $\mathrm{Im}q \subset \mathrm{F}$. Soit x un élément de $\mathrm{Im}q$.

$$\begin{aligned}p(x) = p(q(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} p\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}(x) \text{ (car } p\circ g^{-1}(x)\in F \text{ et donc } g\circ p\circ g^{-1}(x)\in F)\\ &= q(x) = x,\end{aligned}$$

et x est dans F. On a montré que $\mathcal{I}mq \subset F$ et finalement que $\mathcal{I}mq = F$.

q est un projecteur d'image F.

Exercice 4 : Soient E un $\mathscr{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme g de E tel que $f = g\circ p$.

Correction : Deux cas particuliers se traitent immédiatement.

Si $f = 0$, on prend $p = 0$ et $g = \mathrm{Id}_E$ et si $f \in \mathcal{GL}(E)$, on prend $p = \mathrm{Id}_E$ et $g = f$.

On se place dorénavant dans le cas où $\ker f$ et $\mathcal{I}m f$ ne sont pas réduit à 0.

Soit F un supplémentaire de $\ker f$ dans E et G un supplémentaire de $\mathcal{I}m f$ dans E.

On sait que la restriction f' de f à F réalise un isomorphisme de F sur $\mathcal{I}m f$. D'autre part $\dim \ker f = \dim G < +\infty$ et donc $\ker f$ et G sont isomorphes. Soit φ un isomorphisme de $\ker f$ sur G.

On définit une unique application linéaire g en posant $g_{/\ker f} = \varphi$ et $g_{/F} = f'$.

g est un automorphisme de E. En effet,

$$g(E) = g(\ker f + F) = g(\ker f) + g(F) = \varphi(\ker f) + f'(F) = G + \mathcal{I}m f = E,$$

(puisque φ et f' sont des isomorphismes) et donc g est surjective. Par suite g est bijective de E sur lui-même puisque $\dim E < +\infty$.

Soit p la projection sur F parallèlement à $\ker f$. On a

$$(g\circ p)_{/\ker f} = g\circ 0_{/\ker f} = 0_{/\ker f} = f_{/\ker f} \text{ et } (g\circ p)_{/F} = g\circ \mathrm{Id}_{/F} = f' = f_{/F}.$$

Ainsi les endomorphismes $g\circ p$ et f coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de E et donc $g\circ p = f$. Finalement, si on note P(E) l'ensemble des projecteurs de E,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \exists g \in \mathcal{GL}(E),\ \exists p \in P(E) /\ f = g\circ p.$$

Exercice 5 : Soit E un $\mathscr{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient f et g deux projecteurs distincts et non nuls de E tels qu'il existe deux complexes a et b tels que :

$$fg - gf = af + bg.$$

1. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$. En déduire que $gf = f$ puis que $a + b = 0$ puis que $a = -1$.
2. Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, on a $\ker(g) \subset \ker(f)$. Que peut-on en déduire ?

3 Montrer que si f et g sont deux projecteurs qui ne commutent pas et vérifient de plus $fg - gf = af + bg$ alors

(a, b) est élément de $\{(-1, 1), (1, -1)\}$. Caractériser alors chacun de ces cas.

Correction :

1 A partir de $fg - gf = af + bg$ (1), on obtient après composition à droite par g, $fg - gfg = afg + bg$ ou encore $fg = g \circ \frac{1}{1-a}(fg + b\mathrm{Id})$ (puisque $1 - a \neq 0$). On en déduit

$$\mathrm{Im}(fg) \subset \mathrm{Im}g.$$

Mais alors en écrivant (1) sous la forme $f = \frac{1}{a}(fg - gf - bg)$ (puisque a n'est pas nul), on obtient

$$\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}g.$$

L'égalité $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}g$ montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}f$ est invariant par g et fournit donc l'égalité $gf = f$. On compose alors (1) à droite par f et en tenant compte de $gf = f$ et de $f^2 = f$, on obtient $f - f = af + bf$ et donc $(a + b)f = 0$ puis $b = -a$ puisque f n'est pas nul.

(1) s'écrit alors $fg - f = a(f - g)$. En composant à droite par g, on obtient : $a(fg - g) = 0$ et donc $fg = f$ puisque a n'est pas nul. (1) s'écrit maintenant $g - f = a(f - g)$ ou encore $(a + 1)(g - f) = 0$ et donc, puisque f et g sont distincts, $a = -1$.

2 (D'après 1), si a est distinct de 0 et de 1, nécessairement $a = -1$ et (1) s'écrit $fg - gf = -f + bg$).

Soit x un élément de $\ker g$. (1) fournit $-g(f(x)) = af(x)$ $(*)$ puis en prenant l'image par g, $(a+1)g(f(x)) = 0$. Puisque a est distinct de -1, on obtient $g(f(x)) = 0$ et $(*)$ fournit $af(x) = 0$ puis $f(x) = 0$. Donc x est élément de $\ker f$. On a montré que $\ker g \subset \ker f$.

On en déduit $\mathrm{Im}(g - \mathrm{Id}) \subset \ker f$ et donc $f(g - \mathrm{Id}) = 0$ ou encore $fg = f$. (1) s'écrit $f - gf = af + bg$ et en composant à gauche par f, on obtient $f - fgf = af + bfg$. En tenant compte de $fg = f$, on obtient $(a + b)f = 0$ et donc $b = -a$.

(1) s'écrit alors $f - gf = a(f - g)$ et en composant à gauche par g, on obtient $0 = a(gf - g)$ et donc $gf = g$. (1) s'écrit enfin $f - g = a(f - g)$ et donc $a = 1$.

3 Si $a = 0$, (1) s'écrit $fg - gf = bg$. En composant à gauche ou à droite par g, on obtient $gfg - gf = bg$ et $fg - gfg = bg$. En additionnant ces deux égalités, on obtient $fg - gf = 2bg$. D'où, en tenant compte de (1), $bg = 2bg$ et puisque g n'est pas nul, $b = 0$. Par suite $fg - gf = 0$ ce qui est exclu par l'énoncé. Donc, on ne peut avoir $a = 0$. D'après 1) et 2), $(a, b) \in \{(-1, 1), (1, -1)\}$.

1er cas. $(a, b) = (-1, 1)$. C'est le 1) : $fg - gf = -f + g$. On a vu successivement que $gf = f$ puis que $fg = g$ fournissant $(g - \mathrm{Id})f = 0$ et $(f - \mathrm{Id})g = 0$ ou encore $\mathrm{Im}f \subset \ker(g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}f$ et donc $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}g$. Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de même image alors $gf = f$, $fg = g$ et donc $fg - gf = -f + g$. Le premier cas est donc le cas de deux projecteurs de même image .

2ème cas. $(a, b) = (1, -1)$. C'est le cas de deux projecteurs de même noyau.

Exercice 6 : Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E.

Correction : Remarques :

- Soit $(G, *)$ un groupe. Le centre de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Ce centre, souvent noté Z, est un sous-groupe de $(G, *)$.
- $(\mathcal{L}(E), \circ)$ est un magma associatif et unitaire mais non commutatif (pour $\dim E > 1$) mais $(\mathcal{L}(E), \circ)$ n'est pas un groupe. Par contre $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe (groupe des inversibles de $(\mathcal{L}(E), \circ)$).

Soit f un endomorphisme (resp. automorphisme) de $\mathcal{E}$ commutant avec tous les endomorphismes (resp. les automorphismes) de E. f commute en particulier avec toutes les symétries.

Soit x un vecteur non nul de E et s la symétrie par rapport à vect(x) parallèlement à un supplémentaire donné de vect(x)).

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x).$$

Par suite, $f(x)$ est invariant par s et appartient donc à $vect(x)$. Ainsi, si f commute avec tout endomorphisme (resp. automorphisme) de E, f vérifie nécessairement $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ liée et d'après le **??**, f est nécessairement une homothétie. Réciproquement , les homothéties de E commutent effectivement avec tout endomorphisme de E.

Les endomorphismes de E qui commutent avec tout endomorphismes de E sont les homothéties.

Pour le centre de $\mathcal{GL}(E)$, il faut enlever l'application nulle qui est une homothétie mais qui n'est pas inversible.

Exercice 7 : Soient p_1,..., p_n n projecteurs d'un $\mathscr{C}$-espace de dimension finie. Montrer que $(p_1 + ... + p_n$ projecteur$) \Leftrightarrow \forall\, i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$.

Correction : $\Leftarrow$/ Si $\forall\, i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ alors

$$(p_1 + ... + p_n)^2 = p_1^2 + ... + p_n^2 + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = p_1 + ... + p_n,$$

et $p_1 + ... + p_n$ est un projecteur.

$\Rightarrow$/ Supposons que $p = p_1 + ... + p_n$ soit un projecteur. Posons $F_i = \mathcal{I}m p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, puis $F = F_1 + ... + F_n$ et $G = \mathcal{I}m p$. On sait que la trace d'un projecteur est son rang. Par linéarité de la trace, on obtient

$$rg p = \mathcal{T}r p = \mathcal{T}r(p_1) + ... + \mathcal{T}r(p_n) = rg(p_1) + ... + rg(p_n),$$

et donc $\dim G = \dim F_1 + ... + \dim F_n \geqslant \dim F$. D'autre part, $G = \mathcal{I}m(p_1 + ... + p_n) \subset \mathcal{I}m p_1 + ... + \mathcal{I}m p_n = F_1 + ... + F_n = F$. On obtient donc $G = F$ et aussi $\dim(F_1 + ... + F_n) = \dim F_1 + ... + \dim F_n$. D'après l'exercice **??**, $F = F_1 \oplus ... \oplus F_n$ c'est-à-dire

$$\mathcal{I}m p = \mathcal{I}m(p_1) \oplus ... \oplus \mathcal{I}m(p_n).$$

Il reste à vérifier que pour $i \neq j$ et x dans E, $p_i(p_j(x)) = 0$ ou ce qui revient au même que pour $i \neq j$ et y dans $\mathcal{I}m(p_j)$, $p_i(y) = 0$.

Soit y dans $\mathcal{I}m(p_j)$ (et donc dans $\mathcal{I}m p$). Les égalités $y = p_j(y) = p(y)$ fournissent $\sum_{i \neq j} p_i(y) = 0$. La somme $\sum_i \mathcal{I}m(p_i)$ étant directe, on a donc $p_i(y) = 0$ pour chaque $i \neq j$ ce qu'il fallait démontrer.

$$p_1 + \dots + p_n \text{ projecteur} \Leftrightarrow \forall\, i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0.$$

Exercice 8 : Soit E un $\mathscr{C}$-espace de dimension finie n. Soient p_1,..., p_n n projecteurs non nuls de E tels que $\forall\, i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

1. Montrer que tous les p_i sont de rang 1.
2. Soient q_1,..., q_n n projecteurs vérifiant les mêmes égalités. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $q_i = f \circ p_i \circ f^{-1}$.

Correction :

1. On doit savoir que $\mathrm{Im}(p_1 + \dots + p_n) = \mathrm{Im}(p_1) + \dots + \mathrm{Im}(p_n) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.

   Chaque p_i est de rang au moins 1, mais si l'un des p_i est de rang supérieur ou égal à 2 alors $n = \dim \mathrm{E} \geqslant \mathrm{rg}(p_1 + \dots + p_n) = \mathrm{rg}(p_1) + \dots + \mathrm{rg}(p_n) > n$ ce qui est impossible. Donc chaque p_i est de rang 1.
2. Les images des p_i (resp. q_i) sont des droites vectorielles. Pour chaque i, notons e_i (resp. e'_i) un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(p_i)$ (resp. $\mathrm{Im}(q_i)$). D'après 1), $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Vect}(e_n)$ ou encore $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$) est une base de E.

   Soit f l'automorphisme de E défini par $f(e_i) = e'_i$ (f est un automorphisme car l'image par f d'une base de E est une base de E).

   Soit $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. $f \circ p_i \circ f^{-1}(e'_j) = f(p_i(e_j)) = f(\delta_{i,j} e_i) = \delta_{i,j} e'_i = q_i(e_j)$. Ainsi, les endomorphismes q_i et $f \circ p_i \circ f^{-1}$ coïncident sur une base de E et sont donc égaux.

Exercice 9 (ENSAM PT 2009) : On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur $\iff$ $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Comparer $\ker(p+q)$ et $\ker(p) \cap \ker(q)$ lorsque $p + q$ est un projecteur.
3. Comparer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ lorsque $p + q$ est un projecteur.

Correction :

1. $\Leftarrow$
   - p et q étant des projecteurs, on a $p + q \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
   - $(p+q) \circ (p+q) = p \circ (p+q) + q \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$ par hypothèse.

   Donc $p + q$ est un projecteur.

   $\Rightarrow$ Supposons que $p + q$ soit un projecteur. On a $(p+q)^2 = p + q$ donc $p \circ q + q \circ p = 0$ (1)

   En composant, on a $\begin{cases} p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \\ q \circ p \circ q + q \circ p = 0 \end{cases}$, et par soustraction, $p \circ q = q \circ p$ (2).

   D'après (1) et (2), on a bien $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrons que $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$ lorsque $p + q$ est un projecteur.

   $\supset$ immédiat

   $\subset$ Si $u \in \ker(p+q)$, alors $p(u) + q(u) = 0$. En composant par p, on obtient $p(u) + p \circ q(u) = 0$.

   Or on a vu que $p \circ q = 0$. Donc $p(u) = 0$ et $u \in \ker(p)$. De même, $u \in \ker(q)$. Donc $u \in \ker(p) \cap \ker(q)$.
3. Montrons que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ lorsque $p + q$ est un projecteur.

   $\subset$ immédiat

$\supset$ Soit $u \in \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$. On peut donc écrire $u = p(a) + q(b)$.

En composant par p, sachant que $p \circ q = 0$, on obtient $p(u) = p(a)$.

De même, $q(u) = q(a)$.

Finalement, $u = p(u) + q(u) = (p+q)(u) \in \operatorname{Im}(p+q)$.